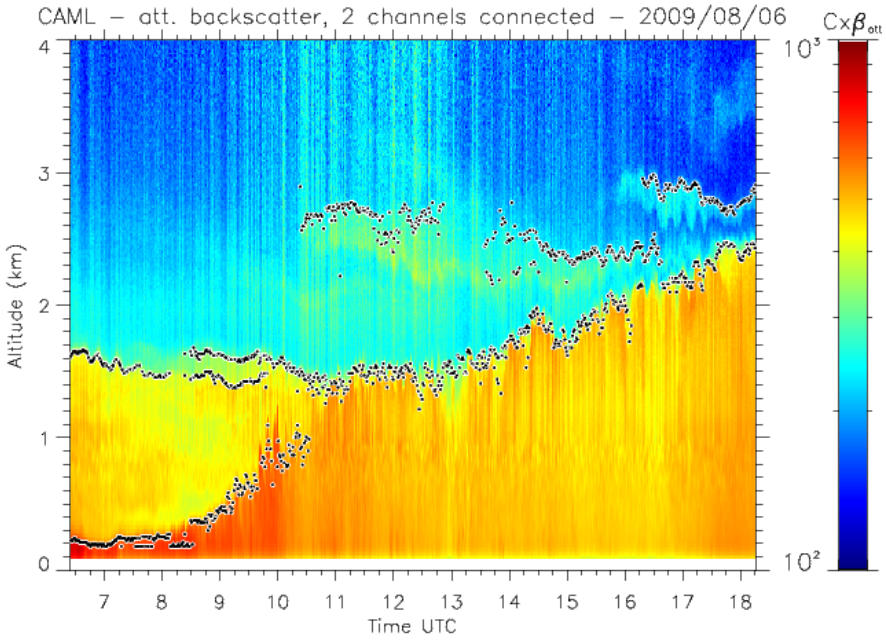
M2 Océan, Atmosphère, Climat et Observations Spatiales

Une introduction à la physique de la couche limite planétaire

Richard Wilson



Parcours dynamique & Environnement

Table des matières

Table des matières i

Notations et symboles iv

1 Introduction 1

1.1 La couche limite planétaire . . . 1

1.1.1 Une définition . . . 1

1.2 Turbulence . . . 4

1.3 Stabilité verticale . . . 4

1.3.1 Température virtuelle . . . 6

1.4 Portrait de la CLA . . . 7

1.4.1 La couche limite diurne . . . 7

1.4.2 La couche limite nocturne . . . 9

1.4.3 Évolution diurne du profil de θ_v . . . 10

1.4.4 Comparaison couche limite - atmosphère libre . . . 10

2 Outils statistiques pour l'étude de la turbulence 13

2.1 La séparation des échelles spatio-temporelles . . . 13

2.1.1 La variabilité . . . 13

2.1.2 Type d'écoulement . . . 13

2.1.3 L'hypothèse de Taylor . . . 13

2.1.4 Le trou spectral . . . 15

2.2 La décomposition de Reynolds . . . 17

2.2.1 Règles de moyennage . . . 17

2.3 Moyennage de Reynolds . . . 18

2.3.1 Moyenne . . . 18

2.3.2 Moments d'ordre 2 . . . 19

2.4 Flux 20
2.4.1 Flux cinématiques 20
2.4.2 Interprétation des covariances 21
2.4.3 Tension de Reynolds (Reynolds stress) 22

3 Les équations des écoulements turbulents dans la couche limite 25
3.1 Les équations de la dynamique et de la thermodynamique 25
3.1.1 Les sept équations 26
3.1.2 Simplifications 28
3.2 Décomposition de Reynolds 28
3.2.1 Équation d'état 28
3.2.2 Équation de continuité 29
3.2.3 Équations de conservation de la quantité de mouvement 30
3.2.4 Conservation de l'énergie 33
3.2.5 Équation de l'humidité : conservation du rapport de mélange 34
3.2.6 Équations simplifiées pour les champs moyens 34
3.3 Bilan de l'énergie cinétique turbulente 36
3.4 Nombres de Richardson 40

4 Les échelles de la turbulence 43
4.1 Échelles de la turbulence 43
4.1.1 Échelles de la turbulence d'une couche en convection libre 43
4.1.2 Échelles de la turbulence pour une couche de surface 45

5 Fermeture des équations de la turbulence 49
5.1 Le problème de la fermeture des équations de la turbulence 49
5.1.1 Ordre des fermetures 50
5.1.2 Fermeture d'ordre 1 : coefficients de diffusion turbulente 51
5.1.3 Longueur de mélange (Prandtl) 51
5.2 Couche d'Ekman 54
5.2.1 Discussion 57
5.3 Un exemple de paramétrisation d'ordre 1,5 57

6 Théorie de la similitude **59**
6.1 Théorie de la similitude 59
6.1.1 La méthode Pi-Buckingham 60
6.1.2 Les classes des échelles de similitude 62
6.2 La théorie de Monin-Obukhov dans la CS 63
6.2.1 CS neutre 64
6.2.2 La CS non neutre 68
6.2.3 Estimation des flux et de l'échelle d'Obukhov 71
6.3 Les domaines d'échelles 72
6.4 Le spectre d'énergie de la turbulence 72
6.4.1 Le domaine inertiel 72

Les humidités atmosphériques **75**
.1 Les mesures d'humidité dans l'atmosphère 75
.1.1 L'humidité spécifique q de l'atmosphère non-saturée 75
.1.2 Le rapport de mélange r, atmosphère non saturée 75
.1.3 L'humidité relative 75
.2 Équation d'état de l'air humide 76
.2.1 Gradient adiabatique d'une atmosphère non saturée 76

Notations d'Einstein **79**

Index **82**

Notations et symboles

Acronymes	**Signification**	**pages**
AL	atmosphère libre	
CLA	couche limite atmosphérique	
CM	couche de mélange	
CLS	couche limite stable	
CR	couche résiduelle	
ddp	densité de probabilité	
dse	densité spectrale d'énergie	
ECT	énergie cinétique turbulente	
EPT	énergie potentielle turbulente	
EPF	énergie potentielle de fond	

Symboles	**Signification**	**pages**
β_θ (β_T)	paramètres de flottabilité	?? (??)
ϵ	$M_v/M_a = 0,622$, rapport des masse molaires de la vapeur d'eau et de l'air.	6 (6)
ϵ_k, ϵ_θ, ϵ_p	taux de dissipation d'énergie cinétique turbulente (W/kg), de demi-variance de température (K^2/s), et d'énergie potentielle turbulente (W/kg).	
λ_K, (λ_T)	micro-échelle de Kolmogorov (de Taylor) (m)	?? (??)
ρ	masse volumique (kg/m^3)	

Notations	**Signification**	**pages**
E_k	énergie cinétique turbulente par unité de masse, J/kg	**??**
E_P	énergie potentielle turbulente par unité de masse, J/Kg	**??**
K_m, K_θ	coefficients de diffusion turbulente pour la quantité de mouvement et la température (m^2s^{-1})	**??**
N	fréquence (pulsation) de flottabilité (ou de Brunt-Väisälä) (rad/s)	
P	Pression	
R_d, R_v	Constante des gaz parfaits pour l'air sec et la vapeur d'eau (J/K/kg)	5
Re	nombre de Reynolds	33
Ri (R_F)	nombre de Richardson de gradient (de flux)	**??** (40)
T, θ	température, température potentielle (K)	
T_v, θ_v	température virtueelle et température potentielle virtuelle (K)	
u, v, w	composantes cartésiennes de la vitesse (m/s)	

Chapitre 1 Introduction

Les caractéristiques principales de la couche limite planétaire sont décrites.

1.1 La couche limite planétaire

La surface terrestre constitue une limite à l'atmosphère terrestre. La couche sous l'influence de la surface, comprise entre 100 m et 2000 m, s'appelle la **couche limite atmosphérique (CLA)**. L'écoulement y diffère très sensiblement de l'équilibre géostrophique, contrairement à l'atmosphère libre (figure 1.1).

Bien sûr toute l'atmosphère répond au forçage de la surface terrestre, mais cette réponse est relativement lente en dehors de la CLA.

1.1.1 Une définition

La couche limite atmosphérique (CLA) est la partie de l'atmosphère qui est sous l'influence de la surface terrestre et qui répond aux forçages de la surface avec des constantes de temps de l'ordre d'une heure ou moins.

La figure 1.2 montre une variation diurne de température dans la couche limite basse, variation qui n'est pas observée aux niveaux supérieurs. Une telle variation diurne est une caractéristique essentielle de la couche limite atmosphérique. Elle est induite par les flux de quantité de mouvement, d'énergie et de constituants résultant de l'interaction avec le sol. Le vecteur de ces flux importants est la turbulence qui elle même résulte des instabilités qu'induit la présence du sol. La figure (1.3) montre la variation diurne de l'énergie cinétique turbulente (ECT) qui est un estimateur de l'intensité de la turbulence. Elle est particulièrement intense durant la journée. L'atmosphère libre ne connaît pas une telle variabilité journalière.

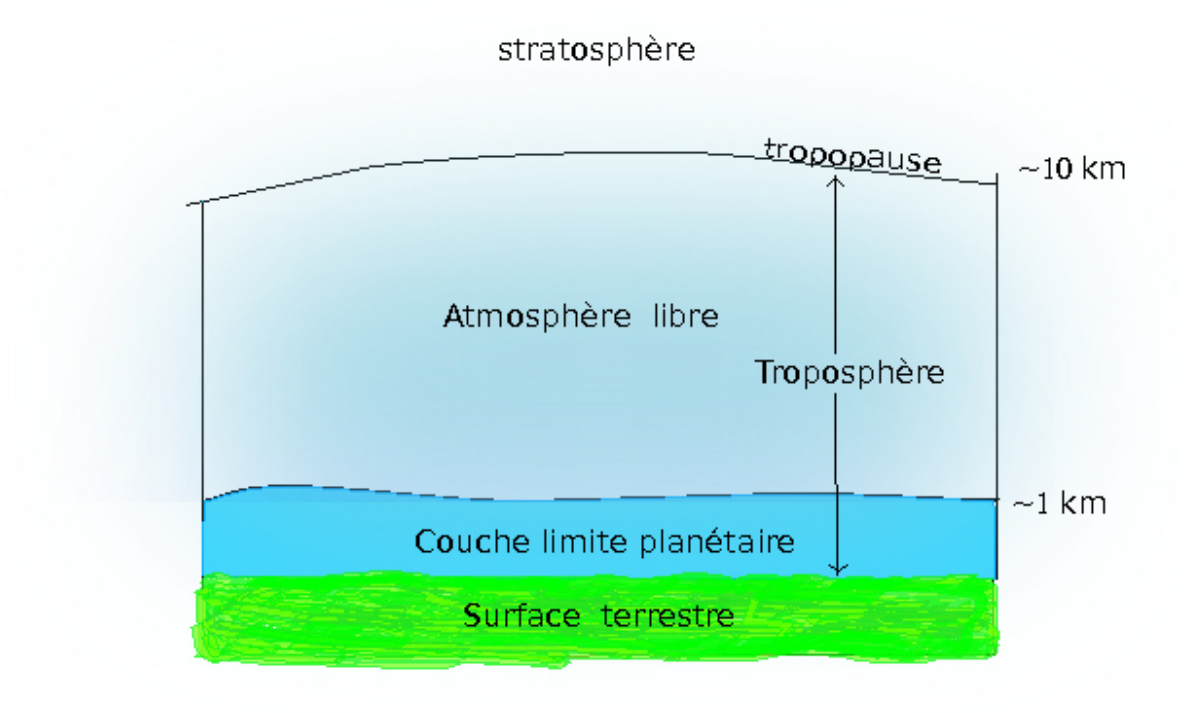


FIGURE 1.1 – La division de l'atmosphère entre couche limite et atmosphère libre

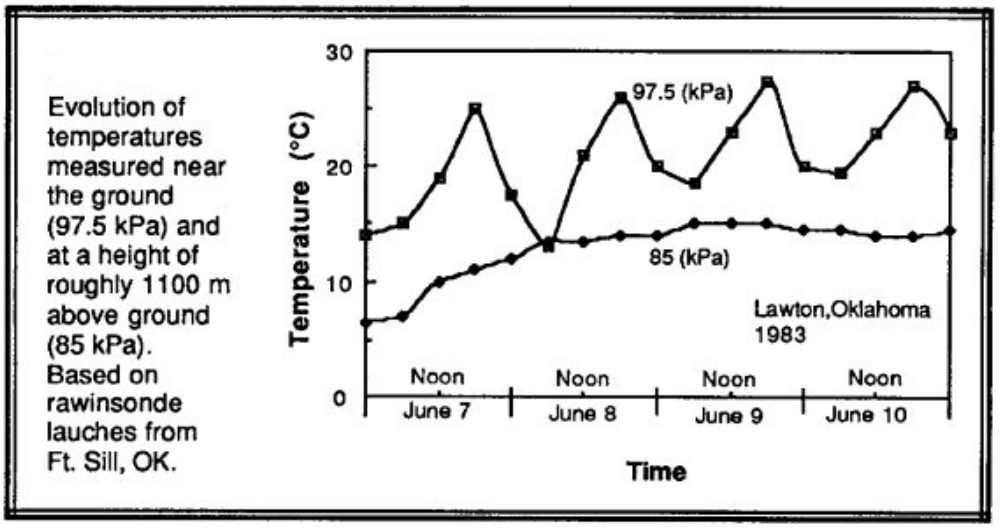


FIGURE 1.2 – La variation diurne de la température dans et hors de la couche limite

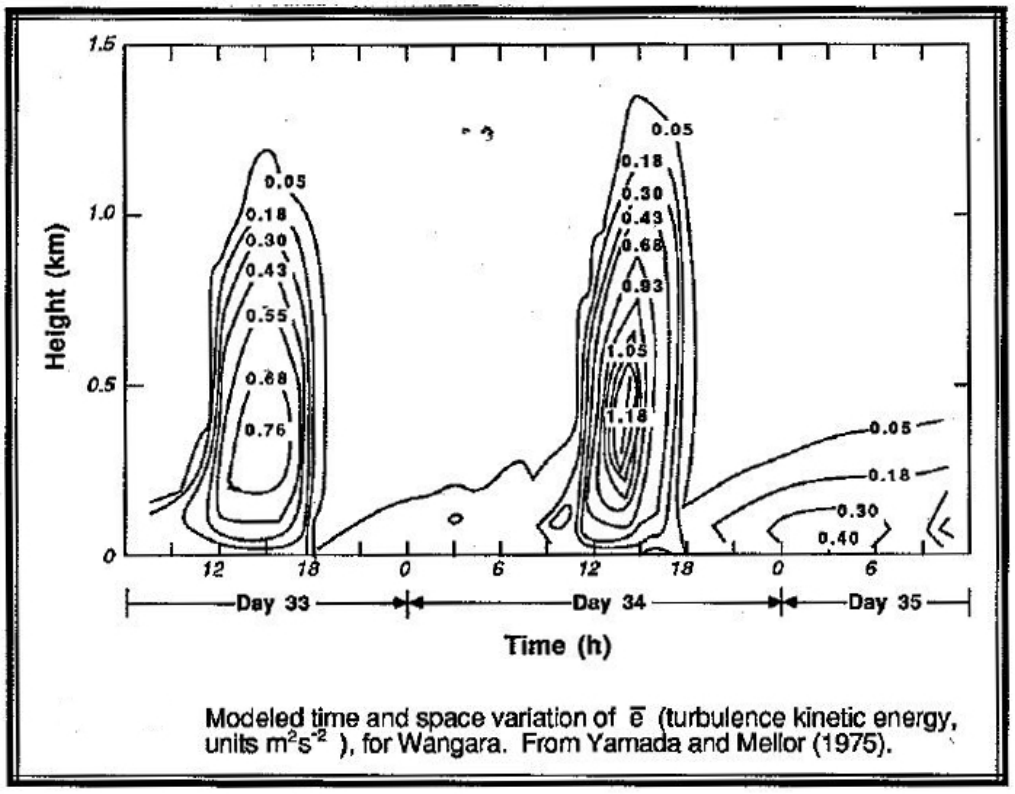


FIGURE 1.3 – La variation diurne de l'ECT dans la couche limite

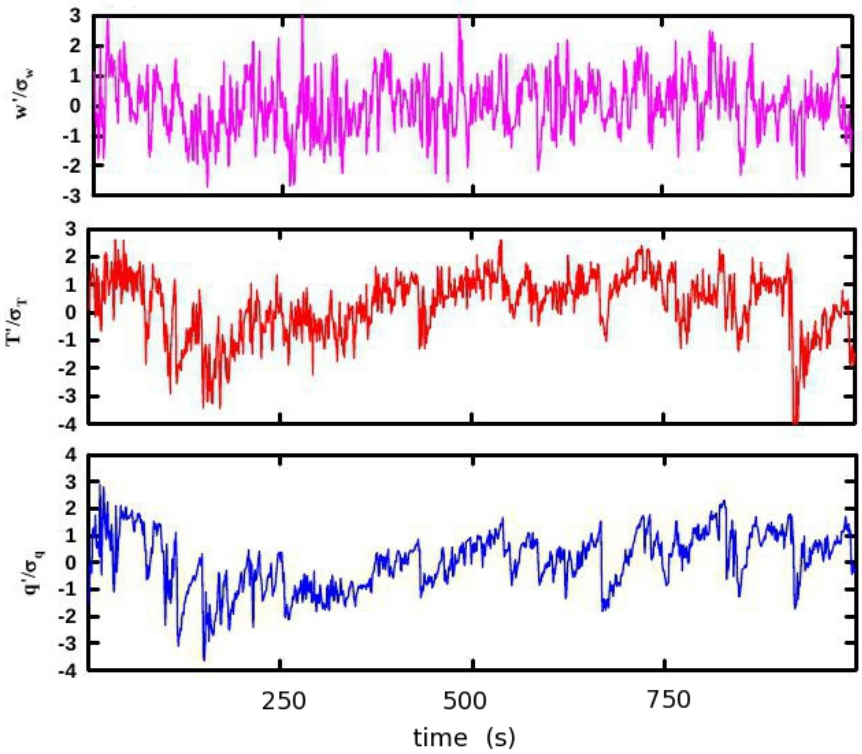


FIGURE 1.4 – Fluctuations de vent, de température et d'humidité sur une durée de deux minutes observées dans la couche limite.

1.2 Turbulence

On observe généralement, dans la couche limite diurne, des irrégularités du vent ou de la température sur des intervalles de temps compris entre quelques secondes et quelques minutes (figure 1.4). Ces irrégularités sont la conséquence de mouvements tourbillonnaires de petite échelle, mouvements qualifiés de **turbulents**. La quasi permanence de la turbulence durant la journée est une autre caractéristique de la CLA. Dans l'atmosphère libre, la turbulence est généralement moins intense et de nature très intermittente. Les fluctuations induites par la turbulence atmosphérique résultent d'une superposition de mouvements tourbillonnaires d'échelles spatiales et temporelles très diverses, s'étendant souvent sur plusieurs décades. Ainsi, dans la CLA, les échelles des plus grandes structures turbulentes atteignent 1000 m, (la hauteur de la CLA), les plus petites tourtbillons (dissipées par viscosité moléculaire) étant de l'ordre du cm.

1.3 Stabilité verticale

Les mouvements de petite et moyenne échelle peuvent être considérés comme adiabatiques. Considérons une parcelle d'air de température T, pression P et masse volumique ρ, l'air étant

considéré comme un gaz parfait. Au cours d'un déplacement adiabatique :

$$dh = c_p \mathrm{d}T = \underbrace{\delta Q}_{=0} + \frac{1}{\rho}\mathrm{d}P$$

où h est l'enthalpie spécifique (i.e. par unité de masse) et c_p est la chaleur massique à pression constante.

Compte tenu de l'équation d'état de l'air sec, $P = \rho R_d T$, où R_d est la constante des gaz parfaits ramemée à l'unité de masse d'air sec, i.e $R_d = R_{GP}/M_{air}$ (J/kg/K) :

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} - \frac{R_d}{c_P}\frac{\mathrm{d}P}{P} = 0$$

d'où la définition de la température potentielle θ

$$\boxed{\theta = T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\kappa}} \tag{1.1}$$

où $P_0 = 1000$ hPa est une pression de réfzrence et $\kappa = R_d/c_P \approx 2/7$. La température potentielle θ est conservée lors des transformations adiabatiques.

Le gradient vertical de température potentielle est un indicateur de la stabilité statique. En effet, la stabilité dépend du signe de la flottabilité, b résultante de la force de pression verticale et du poids,

$$b = -\frac{g}{\rho_\mathrm{p}}(\rho_\mathrm{p} - \rho)$$

où ρ et ρ_p sont respectivement les densités de l'atmosphère environnante et de la parcelle déplacée. La densité de la parcelle ρ_p est inversement proportionnelle à θ,

$$\rho_p \propto \frac{P^{\kappa-1}}{\theta}\,.$$

Considérons un déplacement vertical δz. On suppose que la pression dans et hors de la parcelle s'égalisent instantanément. La température potentielle de la parcelle ne change pas. Si la température potentielle de l'atmosphère croît avec l'altitude,

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_p > \rho \text{ si } \delta z > 0, \quad \text{et} \quad \rho_\mathrm{p} < \rho \text{ si } \delta z < 0$$

La flottabilité s'oppose aux déplacements verticaux (force de rappel) la stratification est stable.

Inversement, si la température potentielle de l'atmosphère décroît avec l'altitude,

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} < 0, \qquad \Longrightarrow \qquad \rho_p < \rho \text{ si } \delta z > 0, \quad \text{et} \quad \rho_\mathrm{p} > \rho \text{ si } \delta z < 0$$

la flottabilité est du même signe que le déplacement vertical. Tout mouvement vertical est alors amplifié, la stratification est instable. La convection peut s'initie dans de telles conditions.

En l'absence d'un processus maintenant l'instabilité statique (par exemple un chauffage par le bas), la convection brasse et mélange rapidement l'atmosphère, un état de stratification neutre est rapidement atteint,

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

Dans l'atmosphère libre, des instabilités statiques sont rarement observées, excepté dans les nuages. En revanche, des instabilités statiques sont couramment observées en couche limite, particulièrement près de la surface les jours de forte insolation.

1.3.1 Température virtuelle

L'équation d'état de l'air humide est modifiée par la présence de vapeur d'eau dont la masse molaire est inférieure à celle de l'air sec :

$$\boxed{P = \rho R_d T \left(\frac{1 + r/\epsilon}{1 + r} \right)} \tag{1.2}$$

où r est le rapport de mélange (kg/kg) (voir annexe 6.4.1, page 75), $\epsilon = R_d/R_v = 0,622$ avec R_v la constante du gaz parfait pour l'unité de masse de vapeur d'eau.

La prise en compte de la vapeur d'eau sur la densité, et donc sur la flottabilité, est couramment représentée par la température virtuelle T_v :

$$\boxed{T_v = T \left(\frac{1 + r/\epsilon}{1 + r} \right).} \tag{1.3}$$

Par conséquent,

$$\rho = \frac{P}{R_d T_v}$$

On définit la température potentielle virtuelle à partir de T_v :

$$\theta_v = T_v \left(\frac{P_0}{P} \right)^{\kappa} \quad \text{et} \quad \rho \propto \theta_v^{-1} \tag{1.4}$$

Dans une atmosphère humide non saturée, la température potentielle virtuelle est quasi-conservée (sauriez vous expliquer pourquoi «quasi» ?). Elle est aussi simplement reliée à la masse volumique. La flottabilité d'une parcelle d'air dépend de la différence des θ_v entre la parcelle et l'atmosphère environnante. Pour une atmosphère non saturée, les conditions de stabilité s'exprimeront donc en fonction du gradient vertical de θ_v.

Dans l'atmosphère libre, la correction apportée par la prise en compte de la vapeur d'eau est négligeable. Ce n'est plus vrai en couche limite.

1.4 Portrait de la CLA

Dans des conditions anticyclonique, la couche limite possède une structure verticale bien définie qui évolue suivant un cycle diurne. En conditions cycloniques, les mouvements verticaux entraînent l'air des basses couches en altitude : il est difficile de définir la couche limite dans ces conditions. On se limitera donc aux conditions anticycloniques pour dresser un portrait de la CLA.

1.4.1 La couche limite diurne

Si on considère la variation avec l'altitude des principaux paramètres caractérisant la couche limite diurne, la température potentielle θ_v, le module du vent U, et la concentration gazeuse c (vapeur d'eau ou polluants), on peut distinguer 3 régions différentes (Figures 1.5).

La couche mélangée

Dans la **couche mélangée (CM)**, la turbulence initiée par la convection, est intense. Au dessus de la couche de surface, les différents paramètres moyens varient peu avec l'altitude. Cette homogénéité implique l'existence de flux verticaux importants. Les vents sont subgéostrophiques, avec une direction croisant les isobares vers les basses pression.

La turbulence peut être produite soit par la convection, c.à.d. par l'ascendance de thermiques chaudes, soit par des instabilités de cisaillement. Lorsque les processus de flottabilité (i.e. thermiques ascendentes) sont dominants, on parle d'un régime de **convection libre**. Quand les processus de cisaillement sont dominants, la CLA est en régime de **convection forcée**.

La couche de surface

La **couche de surface (CS)** représente environ 5–10% (le bas) de la CLA. Elle est incluse de jour dans la couche mélangée. Les gradients verticaux sont importants : de jour, le gradient de θ_v est négatif (forte instabilité induite par le chauffage du sol), le gradient de vent est élevé (vitesse nulle en surface) et les concentrations des gaz émis au sol décroissent avec l'altitude. En revanche, les flux turbulents et les tensions (stress) varient peu avec l'altitude. Le profil de vent est presque logarithmique dans la CS, l'angle de la direction du vent relativement aux isobares croissant comme la surface approche.

La zone d'entraînement

Au sommet de la CM une couche stable agit comme un couvercle pour les thermiques ascendantes. Cette couche est la **zone d'entrainement**. On y trouve des gradients importants, dus aux échanges avec l'atmosphère libre. Parfois, le gradient vertical de température est suffisamment grand pour qu'on observe une inversion de température, i.e. la température absolue croît avec l'altitude. La transition vers le vent géostrophique ainsi que vers les concentrations

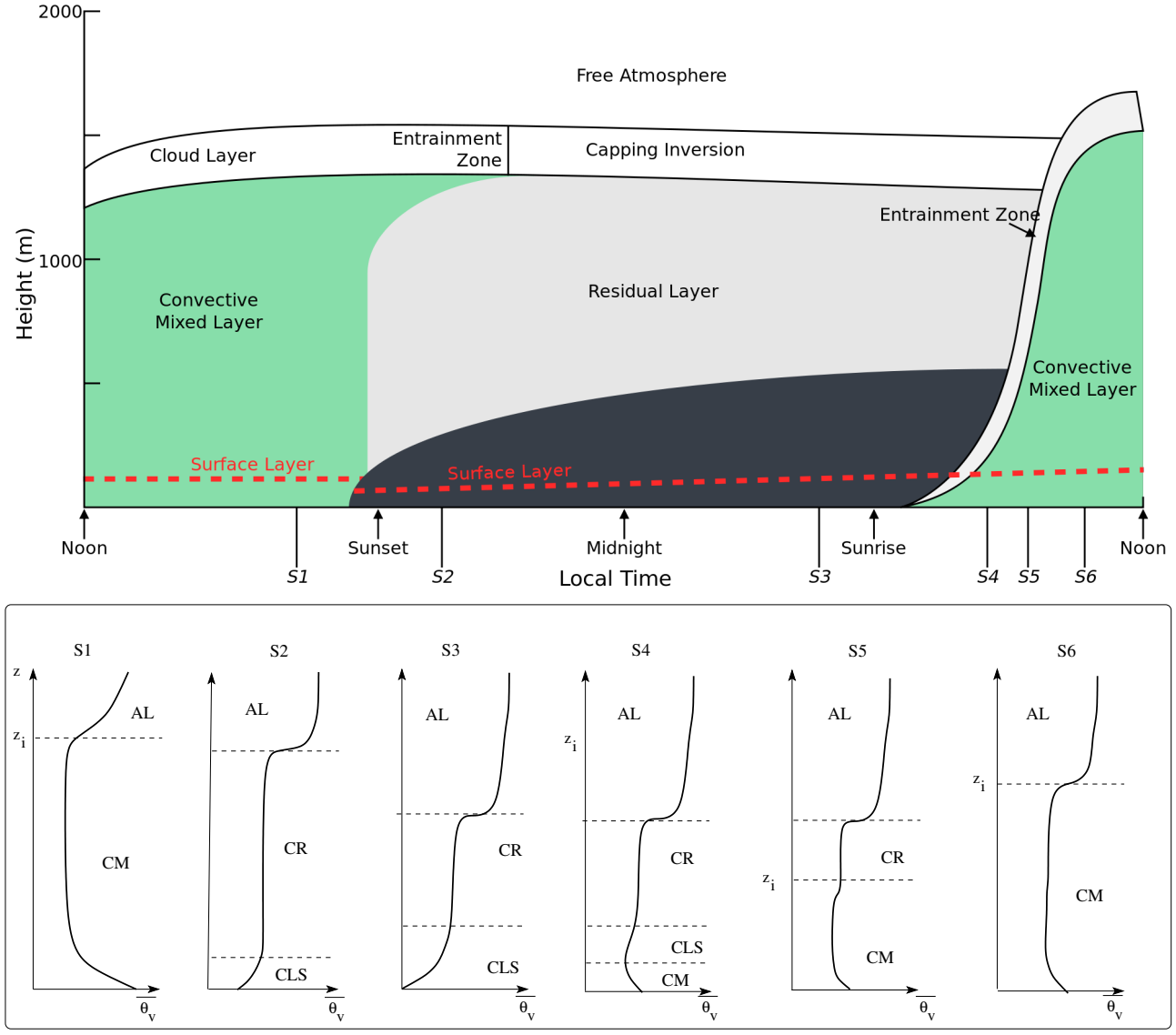


FIGURE 1.5 – (a) Évolution de la couche limite sur une cycle diurne dans des conditions anticycloniques. (b) profils typiques de θ_v correspondants aux instants S1…S8.

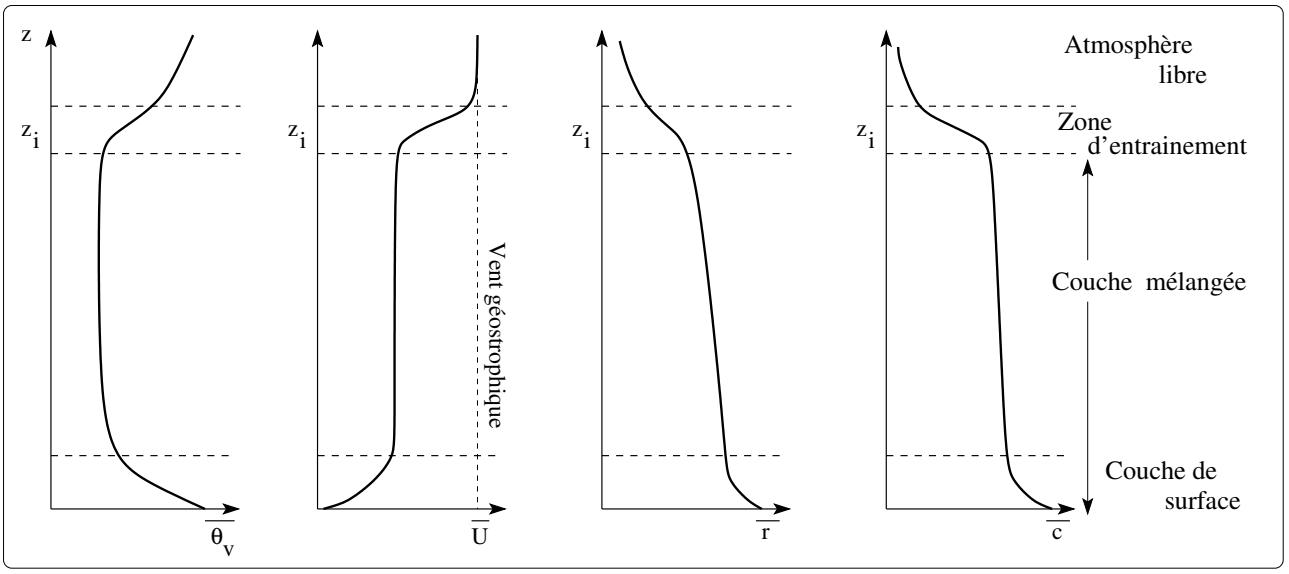


FIGURE 1.6 – Profils typiques de jour dans la CLA : température potentielle θ_v, vitesse du vent $\overline{U} = \sqrt{\overline{u}^2 + \overline{v}^2}$, rapport de mélange $\overline{r}$ et concentration de polluant $\overline{c}$.

faibles en vapeur d'eau ou en polluant de la troposphère libre implique une diminution des flux verticaux de ces paramètres.

1.4.2 La couche limite nocturne

La couche résiduelle

Peu avant le coucher du soleil, les ascendances cessent, la turbulence décroissant alors dans la couche mélangée. Il se forme alors la **couche résiduelle (CR)** dont l'état moyen initial est celui de la couche mélangée. La stratification y est quasi neutre. Les espèces minoritaires et la vapeur d'eau demeurent dans la CR. La température potentielle va décroître d'environ 1°C/jour. La CR n'est pas en contact avec le sol, une couche limite stable près du sol voyant son altitude croître au cours de la nuit.

La couche limite stable

Durant la nuit, la partie basse de la couche limite se refroidit à cause du sol froid. Le gradient vertical de température s'inverse. On parle de **couche limite stable (CLS)**. Le vent près du sol s'affaiblit généralement. Cependant, au dessus, le vent peut être accéléré jusqu'à des vitesses super-géostrophiques, un phénomène appelé jet de basse-couche ou jet nocture. La turbulence est sporadique dans la CLS, causée par des instabilités dynamiques de cisaillement. Les profils typiques de θ_v et de vitesse du vent dans la CLS sont montrés sur la figure (1.7).

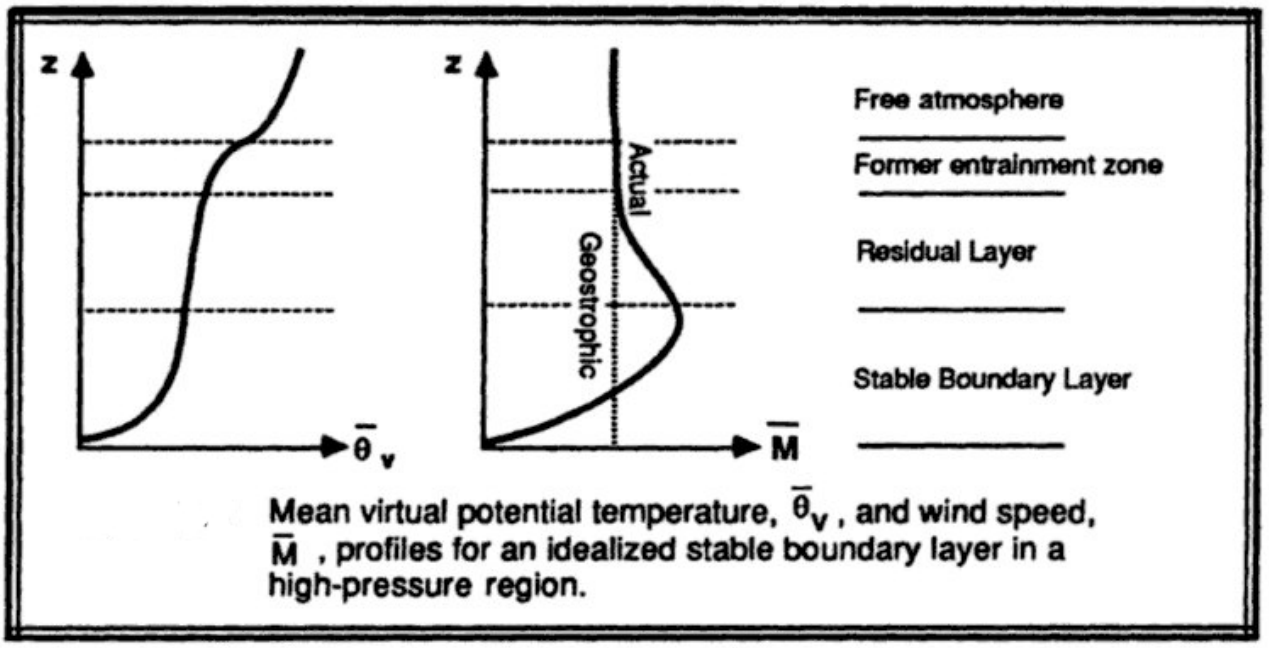


FIGURE 1.7 – Couche limite nocturne

1.4.3 Évolution diurne du profil de θ_v

La figure (1.5b) résume l'évolution diurne du profil de θ_v. Les différentes parties de la couche limite peuvent généralement être identifiées à partir du seul profil de température potentielle. Les profils successifs correspondent aux instant marqués figure (1.5).

1.4.4 Comparaison couche limite - atmosphère libre

Le tableau suivant, extrait de Stull (1988), présente une comparaison des caractéristiques de la couche limite et de l'atmosphère libre (AL).

Table 1-1. Comparison of boundary layer and free atmosphere characteristics.

Property	Boundary Layer	Free Atmosphere
Turbulence	• Almost continuously turbulent over its whole depth.	• Turbulence in convective clouds, and sporadic CAT in thin layers of large horizontal extent.
Friction	• Strong drag against the earth's surface. Large energy dissipation.	• Small viscous dissipation.
Dispersion	• Rapid turbulent mixing in the vertical and horizontal.	• Small molecular diffusion. Often rapid horizontal transport by mean wind.
Winds	• Near logarithmic wind speed profile in the surface layer. Subgeostrophic, cross-isobaric flow common.	• Winds nearly geostrophic.
Vertical Transport	• Turbulence dominates.	• Mean wind and cumulus-scale dominate
Thickness	• Varies between 100 m to 3 km in time and space. Diurnal oscillations over land.	• Less variable. 8-18 km. Slow time variations.

Table 1.1 – Comparaison CLA-AL

Chapitre 2 Outils statistiques pour l'étude de la turbulence

La turbulence est une caractéristique fondamentale de la couche limite atmosphérique. Les méthodes d'étude de la turbulence sont pour l'essentiel de nature statistique. Ces méthodes reposent sur la séparation de l'écoulement suivant une composante moyenne et une composante fluctuante (décomposition de Reynolds).

2.1 La séparation des échelles spatio-temporelles

2.1.1 La variabilité

La figure 2.1 montre un exemple de vent mesuré en couche limite près de la surface. Le caractère irrégulier sur des échelles de la minute est évident – une caractéristique de la turbulence. On voit aussi des fluctuations sur de plus grandes échelles de temps. De fait, la variabilité résulte de la superposition de mouvements d'échelle très diverses.

2.1.2 Type d'écoulement

L'écoulement atmosphérique, i.e. le vent, est généralement analysé en terme de trois catégories : vent moyen, onde et turbulence (figure 2.2). En termes plus savant, on parlera des échelles synoptiques, de la méso-échelle, et de la petite échelle.

2.1.3 L'hypothèse de Taylor

Les tourbillons turbulents sont advectés par le vent moyen. Taylor en 1938 a émit l'hypothèse que sous certaines conditions la turbulence peut être considérée comme gelée dans l'écoulement. Ainsi les propriétés observées en un point fixe en fonction du temps décrivent les propriétés spatiales des fluctuations :

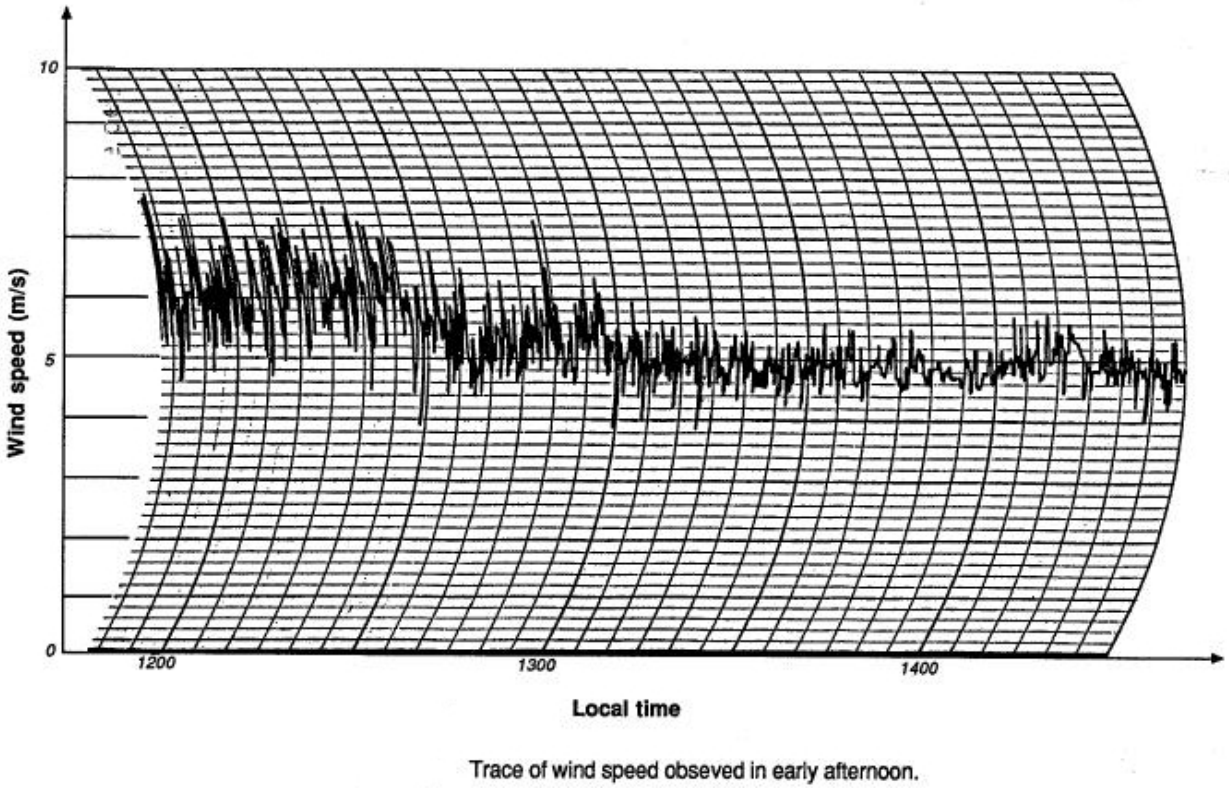


FIGURE 2.1 – (d'après Stull (1988))

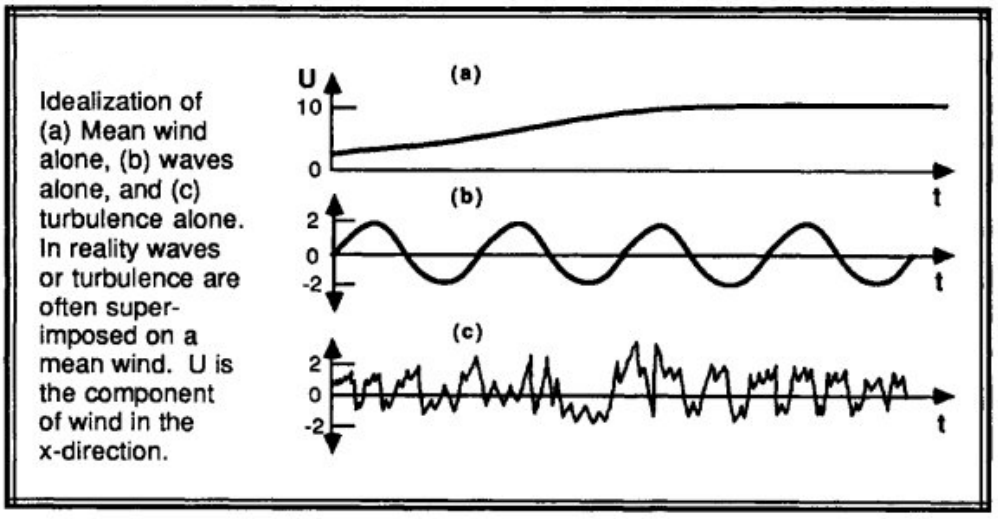


FIGURE 2.2 – (d'après Stull (1988))

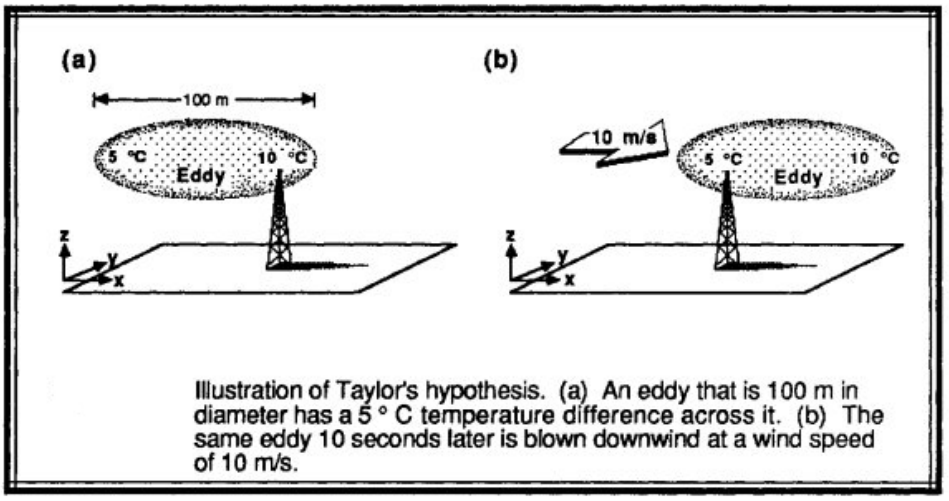


FIGURE 2.3 – (Stull (1988))

Pratiquement, si une propriété A d'un tourbillon advecté n'évolue pas pendant qu'il passe au dessus d'un point d'observation :

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial A}{\partial t} = -U\frac{\partial A}{\partial x} \tag{2.1}$$

2.1.4 Le trou spectral

La figure 2.4 montre un exemple de spectre de l'énergie cinétique du vent mesurée près du sol. Cette figure montre l'intensité relative des mouvements d'échelle diverse. En abscisse, la fréquence des fluctuations (en Hz), en ordonnée, la densité d'énergie cinétique en fonction de la fréquence (J/Hz). Moyennant l'hypothèse de Taylor, les fluctuations associées à un intervalle de fréquence donné sont caractéristiques d'une échelle spatiale.

Le pic de période $\sim$ 4 jours est associé aux variations synoptiques (ondes de Rossby). Le pic suivant (période 24 h) est associé aux variations diurnes. Le pic suivant décrit l'énergie des tourbillons ayant des périodes comprises entre 10 s et 15 min. Ces tourbillons sont la signature de la **turbulence petite échelle**.

Il apparaît sur le spectre de la figure (2.4) un «trou» correspondant à une faible variabilité du vent pour des périodes de l'ordre de 0,5–1 heure. Il existe donc une claire séparation d'échelle, les fluctuations de plus haute fréquence étant associée aux fluctuations de turbulence.

Une telle séparation d'échelle n'est pas aussi clairement observée dans l'atmosphère libre.

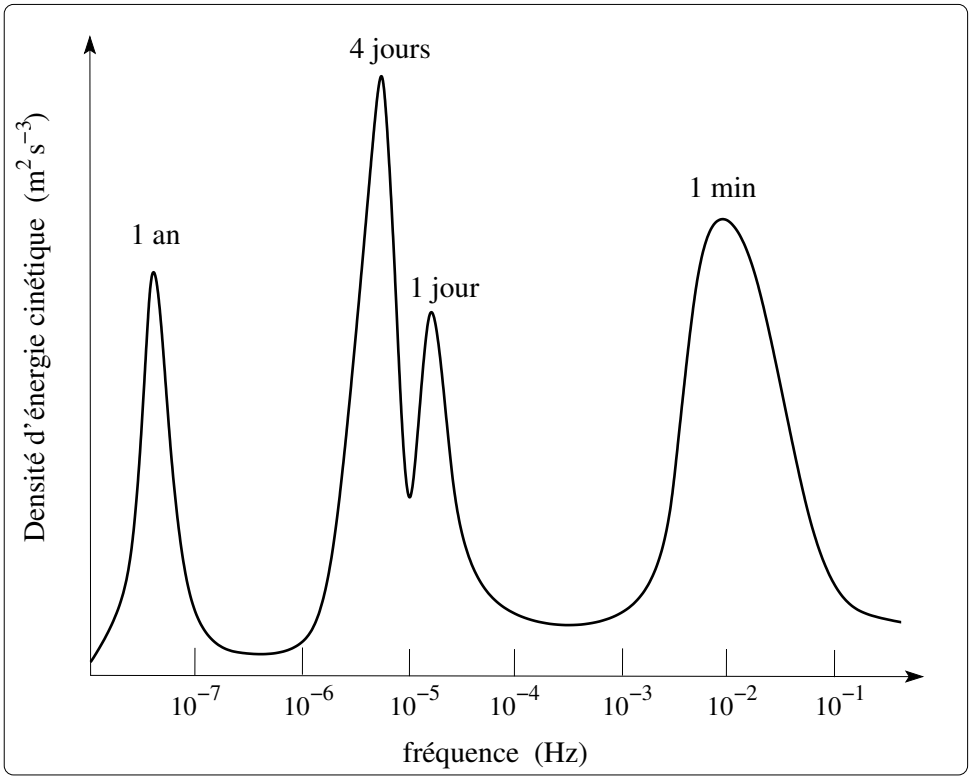


FIGURE 2.4 – Spectre d'énergie cinétique dans la CLA.

2.2 La décomposition de Reynolds

Il existe donc un moyen simple d'isoler les fluctuations turbulentes. On sépare les variables instantanées en une valeur moyenne et une fluctuation. Pour une composante u du vent :

$$u = \overline{u} + u'$$

où $\overline{u}$ est la vitesse moyenne et u' la fluctuation définie comme **la différence entre la vitesse mesurée et la vitesse moyenne**.

Comment définir la moyenne ? Plusieurs choix sont possibles : moyenne temporelle, moyenne spatiale et moyenne d'ensemble. Ainsi, considérons une grandeur $X(r,t)$, où r désigne une coordonnée spatiale et t le temps. La moyenne temporelle ${}^t\overline{X(r)}$ est définie par

$${}^t\overline{X(r)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X(r,t_i) \qquad \text{ou} \qquad {}^t\overline{X(r)} = \frac{1}{T}\int_{+}^{T} X(r,t)\mathrm{d}t\,.$$

De même pour une moyenne spatiale. Une moyenne d'ensemble est définie comme une moyenne arithmétique sur n réalisations supposées identiques :

$${}^e\overline{X(r,t)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i(r,t)$$

En pratique, on considère le plus souvent que ces moyennes sont équivalentes. C'est **l'hypothèse ergodique** :

$${}^e\overline{X(r,t)} =^t \overline{X(r,t)} =^s \overline{X(r,t)} \equiv \overline{X(r,t)}$$

L'hypothèse ergodique suppose plus ou moins implicitement que les champs sont stationnaires et homogène. Dans la CLA on supposera souvent l'homogénéité horizontale.

2.2.1 Règles de moyennage

Soient X et Y deux variables dépendantes du temps, α et β deux constantes.

$$\begin{aligned}
\overline{(\alpha X + \beta Y)} &= \alpha\overline{X} + \beta\overline{Y} \\
\overline{\overline{X}} &= \overline{X} \\
\overline{\overline{X}Y} &= \overline{XY} \\
\overline{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}} &= \frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned} \tag{2.2}$$

La dernière propriété mérite qu'on s'y arrête.

Soit $X(r,t)$ un champ, r est une coordonnée spatiale, t le temps. Considérons une moyenne spatiale ${}^s\overline{X}(t) = \int_{\Delta r} X(r,t)\mathrm{d}r/\Delta r$. dont les bornes d'intégration dépendent du temps. La règle de Leibniz sur la dérivation d'une intégrale s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{r_1(t)}^{r_2(t)} X(r,t)\mathrm{d}r\right) = X(t,r_2)\frac{\mathrm{d}r_2}{\mathrm{d}t} - X(t,r_1)\frac{\mathrm{d}r_1}{\mathrm{d}t} + \int_{r_1(t)}^{r_2(t)}\left(\frac{\partial X(r,t)}{\partial t}\right)\mathrm{d}r$$

Par conséquent, la dérivée de la moyenne n'est pas égale à la moyenne de la dérivée. Cette condition peut se rencontrer si l'on moyenne suivant la verticale dans la CLA dont l'épaisseur est variable.

Si les bornes ne dépendent pas du temps, on a bien :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_{\Delta r} X\mathrm{d}r\right) = \int_r \left(\frac{\partial X}{\partial t}\mathrm{d}r\right) \quad \Longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}{}^s\overline{X}}{\mathrm{d}t} = {}^{\mathrm{s}}\overline{\left(\frac{\partial X}{\partial t}\right)}$$

Si $\overline{X}$ est une moyenne temporelle, i.e. $\overline{X} \equiv {}^t\overline{X}$:

$$\overline{\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}} = \frac{\mathrm{d}\overline{X}}{\mathrm{d}t}$$

la moyenne des pentes est bien égale à la pente de la moyenne.

2.3 Moyennage de Reynolds

2.3.1 Moyenne

On considère maintenant des variables définies en termes de leur moyenne et d'une fluctuation : $X = \overline{X} + X'$ et $Y = \overline{Y} + Y'$. Compte tenu des propriétés du spectre d'énergie des grandeurs atmosphériques dans la CLA, la moyenne sera choisie de sorte à isoler les fluctuations turbulentes. La moyenne sera ainsi estimée sur des intervalles de temps d'une demi-heure typiquement, le terme fluctuant représentant les perturbations imputables à la turbulence.

On montre aisément les résultats suivants :

$$\overline{X} = \overline{X + X'} = \overline{X} + \overline{X'} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\overline{X'} = 0.} \tag{2.3}$$

Par conséquent :

$$\boxed{\overline{X'\overline{X}} = 0.} \tag{2.4}$$

$$\boxed{\overline{XY} = \overline{XY} + \overline{X'Y'}} \tag{2.5}$$

Les termes non linéaires d'ordre 2 comme $\overline{X'Y'}$ ne peuvent en général être négligés : ils expriment des flux turbulent.

2.3.2 Moments d'ordre 2

Variance

Une estimation de la variance d'une grandeur X est :

$$\boxed{\sigma_X^2 = \overline{(X - \overline{X})^2} = \overline{X'^2}} \tag{2.6}$$

l'écart type étant défini comme

$$\sigma_X = \left(\overline{X'^2}\right)^{1/2}$$

L'intensité de la turbulence est souvent quantifiée par l'énergie cinétique turbulente (ECT) par unité de masse, i.e. la demi-variance des fluctuations de vitesse :

$$\text{ECT} : E_k = \frac{1}{2}(\sigma_u^2 + \sigma_v^2 + \sigma_w^2) \tag{2.7}$$

Covariance

La covariance est définie comme

$$\boxed{\text{Cov}_{XY} = \overline{(X - \overline{X})(Y - \overline{Y})} = \overline{X'Y'}} \tag{2.8}$$

La covariance indique le degré de variabilité commune entre deux variables. Ainsi $\text{Cov}_{wT} = \overline{w'T'}$ sera positif si l'atmosphère est instable ($T' > 0$ pour $w' > 0$ et réciproquement). Inversement, $\overline{w'T'}$ sera négatif dans une atmosphère stable.

Coefficient de corrélation

Par définition

$$\boxed{r_{XY} = \frac{\text{Cov}_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}} \tag{2.9}$$

Ainsi $r_{XY} = \pm 1$ si les variables sont parfaitement corrélées ou anti corrélées. Si les variables sont indépendantes $r_{XY} \approx 0$. (la réciproque est fausse).

Autocorrélation

On cherche ici à décrire le degré de cohérence entre un signal et le même signal décalé dans le temps. On définit l'autocorrélation R_{XX} par :

$$\boxed{R_{XX}(t, t+\tau) = \overline{(X(t) - \overline{X(t)})(X(t+\tau) - \overline{X(t+\tau)})}} \tag{2.10}$$

Cette définition pose des problèmes pratique pour des échantillons de taille finie puisque la moyenne peut varier en fonction du temps. De fait, on supposera, pour appliquer (2.10), que le champ X est stationnaire à l'ordre 2. Dans ces conditions, R_{XX} ne dépend pas de l'instant t mais seulement du décalage τ :

$$R_{XX}(t, t+\tau) = R_{XX}(\tau) \tag{2.11}$$

Un théorème important (théorème de Wiener-Khinchine) établit que la transformée de Fourier de l'autocorrélation R_{XX} est la densité spectrale d'énergie de X.

2.4 Flux

2.4.1 Flux cinématiques

Un flux exprime le tranfert d'une quantité par unité de surface et de temps. Ainsi, un flux de quantité de mouvement a pour dimension [MLT^{-1}/L^2/T], soit une force par unité de surface. C'est la dimension d'une contrainte (stress). Un flux de chaleur a pour dimension des Joules/m^2. On ne mesure pas aisément une quantité de mouvement ou une quantité de chaleur, mais plutôt des vitesses ou des températures.

Afin de les estimer en fonction de quantités aisément mesurables, vitesses, température, concentration, les flux sont généralement exprimés sous forme **cinématiques** ; on les divise par la masse volumique de l'air ρ. Le flux de chaleur sera lui divisé par ρc_p. On déduit les unité (MKS) des flux cinématiques suivant :

Flux de masse	m/s
Flux de chaleur	K·m/s
Flux de quantité de mouvement	(m/s)^2
Flux d'humidité	(m/s)

Le flux d'une quantité scalaire est défini suivant les 3 directions de l'espace, c'est donc un vecteur. Ainsi, le flux cinématique vertical de chaleur par le vent moyen (advection verticale) sera exprimé par $\overline{Q_H} = \overline{w}\overline{T}$, le flux effectif de chaleur étant $\rho c_P Q_H$. Pour la quantité de mouvement, le flux est un tenseur (3×3) puisque chaque composante de la vitesse peut être transportée dans trois directions. Le tenseur de flux de quantité de mouvement comprend 9 termes dont 6 sont indépendants puisque $\overline{wu} = \overline{uw}$.

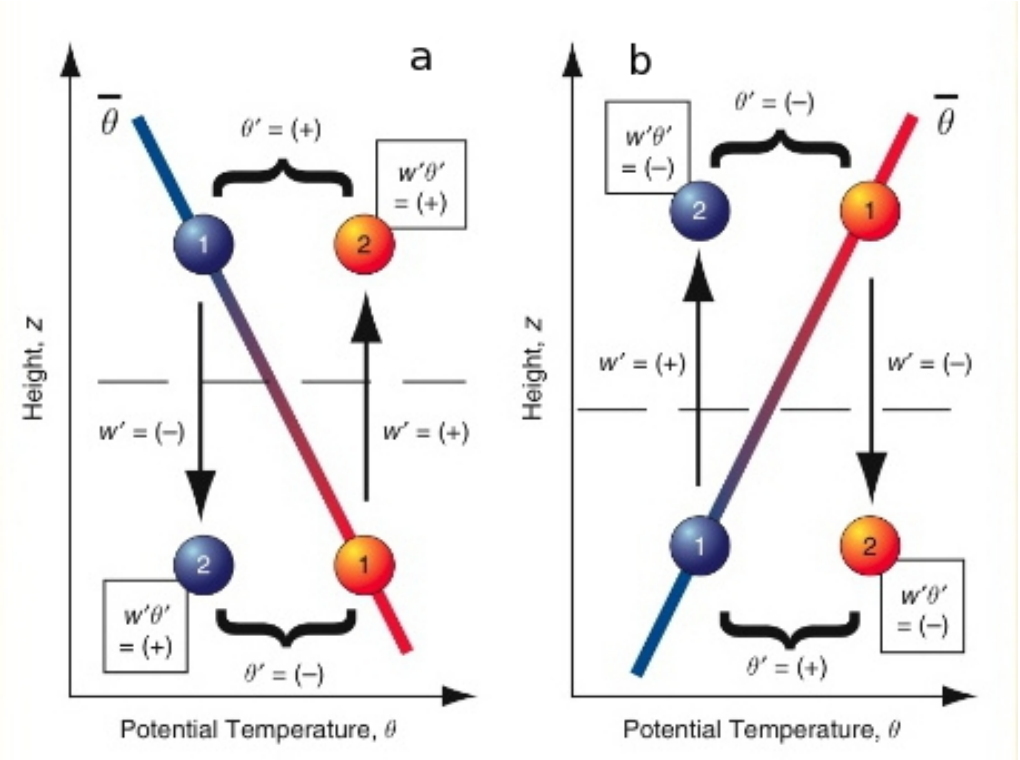


FIGURE 2.5 – (b) Mouvement d'une parcelle d'air dans une atmosphère instable et (b) dans une atmosphère stable (d'après Wallace and Hobbs (2006))

2.4.2 Interprétation des covariances

Un terme de covariance comme $\overline{w'\theta'}$ a la dimension d'un flux cinématique de chaleur. Si les fluctuations turbulentes de w' et θ' sont indépendantes, la covariance est nulle. Montrons qu'en général, il n'en est rien et qu'un flux turbulent de chaleur résulte bien de la covariance $\overline{w'\theta'}$.

La figure (2.6a) illustre une situation ou existe un gradient négatif de température potentielle.

Considérons le mouvement associé à un tourbillon dans cette atmosphère. Une parcelle d'air est déplacée verticalement en conservant sa température potentielle (déplacement adiabatique). L'air déplacé vers le haut ($w' > 0$), est plus chaud que l'environnement ($\theta' > 0$), et donc $w'\theta' > 0$. De même, l'air déplacé vers le bas ($w' < 0$) est plus froid que l'air ambiant ($\theta' < 0$), et donc $w'\theta' > 0$. Par conséquent, $\overline{w'\theta'} > 0$, la turbulence transporte de la chaleur vers le haut. Si l'atmosphère est stable, $\overline{w'\theta'} < 0$ (figure (2.6b), le flux turbulent de chaleur est dirigé vers le bas.

On peut étendre ce raisonnement pour écrire les différents flux cinématiques turbulents.

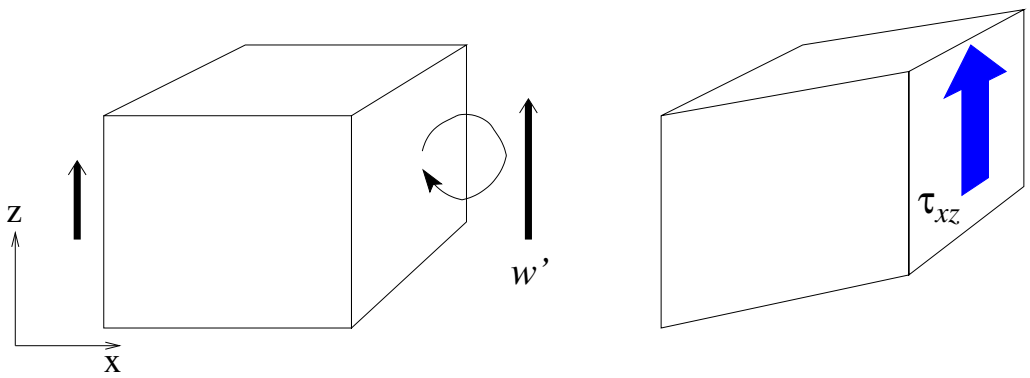


FIGURE 2.6 – Illustration de la contrainte de Reynolds à travers une surface.

Flux de chaleur vertical	$\overline{w'\theta'}$
Flux de chaleur dans la direction x	$\overline{u'\theta'}$
Flux vertical de qtté de mouvement horizontal	$\overline{u'w'}$

2.4.3 Tension de Reynolds (Reynolds stress)

Les flux turbulent de quantité de mouvement a un impact sur le bilan de quantité de mouvement. Considérons une parcelle cubique de fluide. Le transfert de vitesses différentes à travers les surfaces opposées du cube a pour effet de déformer celui-ci. Cette déformation est la résultante d'une contrainte (contrainte) de Reynolds $\overline{u'w'j}$.

La contrainte de Reynolds est décrite par un tenseur 3×3 dont 6 termes sont indépendants.

La vitesse de friction

La magnitude de la contrainte de Reynolds près du sol est un paramètre important de la couche limite. Le flux vertical de quantité de mouvement horizontal près du sol, τ_s est :

$$\tau_{xz} + \tau_{yz} = -\overline{\rho}\overline{u'w'}_s - \overline{\rho}\overline{v'w'}_s \qquad \text{et} \qquad |\tau_s| = \left(\tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2\right)^{1/2}$$

où l'indice s signifie «près de la surface». On définit à partir de τ_s une échelle de vitesse appelé **vitesse de friction** u_* **:**

$$u_* = \left(\overline{u'w'}_s^2 + \overline{v'w'}_s^2\right)^{1/2} = \frac{|\tau_s|}{\overline{\rho}} \tag{2.12}$$

La figure 2.7 montre une mesure de la variabilité journalière du flux cinématique turbulent de chaleur et de la vitesse de friction u_*. Le flux de chaleur est positif pendant la journée, signature d'une couche de surface convective (instable). Le flux de chaleur est négatif la nuit, signature d'une couche de surface stable.

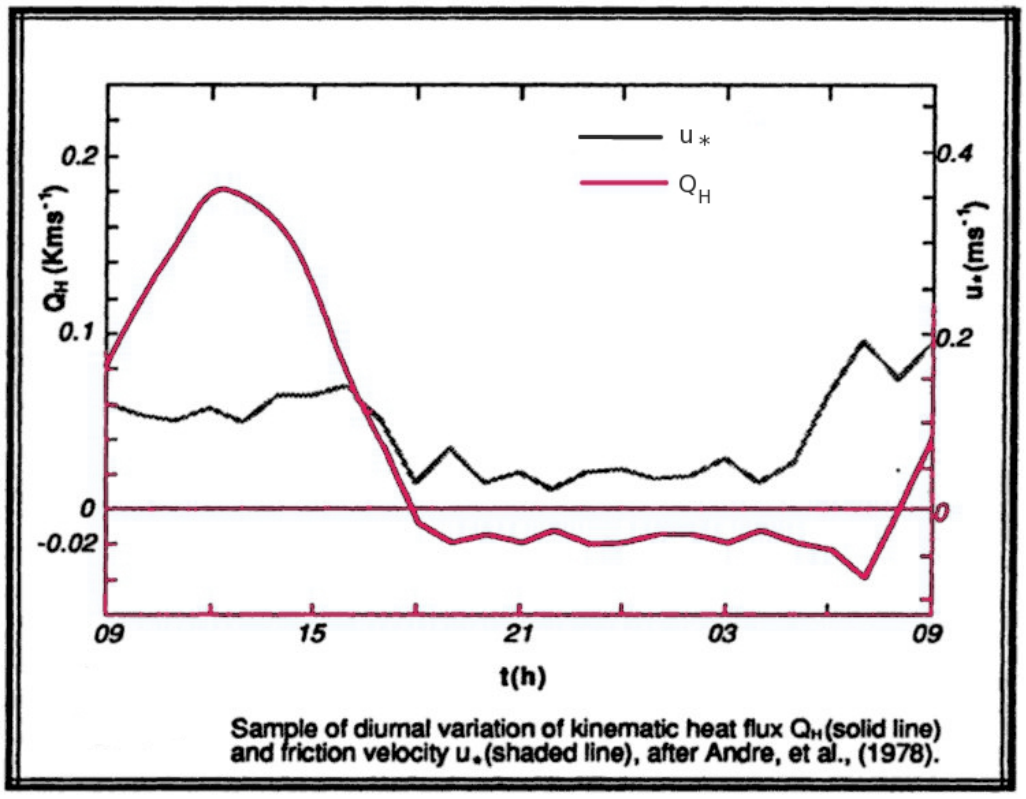


FIGURE 2.7 – Variation diurne du flux cinématique de chaleur et de la vitesse de friction (d'après Stull (1988))

Chapitre 3 Les équations des écoulements turbulents dans la couche limite

Les équations décrivant l'état de l'atmosphère et son évolution sont au nombre de sept : six équations de conservation et une équation d'état. Les équations pronostiques des quantités moyennes et des fluctuations sont présentées. Des simplifications basées sur les échelles de la couche limite sont justifiées.

3.1 Les équations de la dynamique et de la thermodynamique

Les équations décrivant l'état de l'atmosphère et son évolution sont au nombre de sept : une équation d'état, trois équations de conservation de la quantité de mouvement (deuxième loi de Newton), l'équation de conservation de l'énergie, et enfin les équations de conservation de la masse et de la vapeur d'eau.

Ces 7 équations concernent les champs suivants :

√ les trois composantes cartésiennes du vent, u, v, w, (m/s), suivant les axes orientés Ox (vers l'est), Oy (nord) et Oz (vertical) ;
√ la température absolue T, (K)
√ la pression P, (Pa),
√ la masse volumique ρ (kg/m^3),
√ l'humidité spécifique de vapeur d'eau, q, (kg/kg).

chacune de ces variables dépendant des coordonnées d'espace, x, y, z, et du temps t.

3.1.1 Les sept équations

L'équation d'état

Pour un air humide l'équation d'état s'écrit

$$\boxed{P = \rho R_d T_v} \tag{3.1}$$

où ρ la masse volumique de l'air humide, R_d la constante des gaz parfait pour l'unité de masse d'air sec, et T_v la température virtuelle (pour la dérivation de cette expression, voir annexe 6.4.1, page 75). Les variations de densités qu'induit la présence de vapeur d'eau sont généralement négligeable dans l'atmosphère libre, elles ne le sont pas dans la CLA.

L'équation de conservation de la masse

L'équation de continuité s'écrit sous deux formes équivalentes :

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho u_j) = 0} \qquad \text{ou} \qquad \boxed{\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0} \tag{3.2}$$

où u_j est une des composantes du vent (notation d'Einstein, voir annexe .2.1, page 79).

Les équations de conservation de la quantité de mouvement

Les trois équations scalaires, une pour chaque composante du vent (u, v et w), s'écrivent :

$$\boxed{\underset{\mathrm{I}}{\frac{\partial u_i}{\partial t}} \underset{\mathrm{II}}{+u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j}} = \underset{\mathrm{III}}{-\delta_{i3} g} \underset{\mathrm{IV}}{-\epsilon_{ij3} f_c u_j} \underset{\mathrm{V}}{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i}} \underset{\mathrm{VI}}{+\nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2}}} \tag{3.3}$$

I taux de variation (Eulérien)

II advection

III gravité

IV accélération de Coriolis, $f_c = 2\Omega \sin\phi = (1,45 \cdot 10^{-4}) \sin\phi$, ϕ étant la latitude.

V gradient de pression

VI contrainte visqueuse, ν est la viscosité cinématique ($\nu \sim 1,5 \times 10^{-5}$ m^{2}s^{-1}).

L'écriture du terme de contrainte visqueuse sous cette forme résulte de l'hypothèse que l'atmosphère est un fluide Newtonien, c.à.d. une fluide pour lequel le tenseur des déformations est proportionnel à la contrainte exercée.

L'équation de conservation de l'humidité

Posons $q_T = q + q_L$ l'humidité spécifique totale de l'air, q et q_L étant les humidité spécifiques de vapeur et de liquide. Les différentes mesures de l'humidité atmosphériques sont résumées dans l'annexe 6.4.1, page 75. L'équation de conservation de q_T s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial q_T}{\partial t} & +u_j\dfrac{\partial q_T}{\partial x_j} & = & \nu_q\dfrac{\partial^2 q_T}{\partial x_j^2} \\ \text{I} & \text{II} & & \text{VI} \end{array}} \tag{3.4}$$

VI diffusion moléculaire, ν_q est la diffusivité moléculaire pour la vapeur d'eau dans l'air ($\nu_q \sim 2,5 \times 10^{-5}$ m^{2}s^{-1}).

En séparant l'humidité entre vapeur et non-vapeur, i.e. $q_T = q + q_L$, on obtient l'équation de conservation de la vapeur d'eau prenant en compte le changement de phase de l'eau :

$$\boxed{\begin{array}{ccccc} \dfrac{\partial q}{\partial t} & +u_j\dfrac{\partial q}{\partial x_j} & = & \nu_q\dfrac{\partial^2 q}{\partial x_j^2} & +\dfrac{E}{\rho} \\ \text{I} & \text{II} & & \text{VI} & \text{VII} \end{array}} \tag{3.5}$$

VII E (kg/m^3/s) est la masse de vapeur d'eau créée par évaporation ou sublimation par unité de volume et de temps.

L'équation de conservation de l'énergie

La première loi de la thermodynamique décrit le bilan de l'énergie interne ou de l'enthalpie. Dans la couche limite, il faut tenir compte, dans ce bilan, de la chaleur dégagée ou absorbée lors des changements de phase de l'eau. On parlera alors de **chaleur latente**, par contraste avec la **chaleur sensible** associée à la température. Le bilan d'énergie s'écrit :

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial \theta}{\partial t} & +u_j\dfrac{\partial \theta}{\partial x_j} & = & \nu_\theta\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x_j^2} & -\dfrac{L_p E}{\rho c_p} & -\dfrac{1}{\rho c_p}\dfrac{\partial R_j}{\partial x_j} \\ \text{I} & \text{II} & & \text{VI} & \text{VII} & \text{VIII} \end{array}} \tag{3.6}$$

VII chaleur absorbée par l'évaporation ($E > 0$ ou dégagée par la condensation ($E < 0$), L_p étant la chaleur latente associée avec le changement de phase de E.

VIII R_j est le flux de chaleur radiatif dans la direction j.

Les valeurs pour la chaleur latente à 0°C sont :

- $L_v = 2,5 \times 10^6$J/kg (vaporisation),
- $L_f = 3,34 \times 10^5$J/kg (fusion),
- $L_s = 2,83 \times 10^6$J/kg (sublimation).

3.1.2 Simplifications

Dans certains contextes, des termes peuvent être négligés, d'autres peuvent être considérés comme constants. Dans la CLA, les équations sont simplifiées moyennant les approximations suivantes :

(i) la viscosité dynamique ($\mu = \rho\nu$), ν étant la viscosité cinématique, et la diffusivité thermique (ν_θ) sont constantes dans tout le fluide ; Ainsi la faible dépendance de ces variables à la température et à la pression est négligeable. C'est une très bonne approximation dans la CLA ;

(ii) l'écoulement est considéré comme incompressible. Dans la CLA ceci est une excellente approximation ;

(iii) les fluctuations des propriétés du fluide sont beaucoup plus petites que les quantités moyennes, i.e. p'/p, T'/T, ρ'/ρ, q'/q sont très inférieurs à 1. Ceci est une excellente approximation dans la CLA ;

(iv) p'/p peut être négligé devant T'/T et ρ'/ρ, ce qui est généralement valide exception faite des évènements de forts vents. En résumé, les changements de densité résultant des changements de pression sont négligeables (première approximation de Boussinesq) ;

(v) Les fluctuations de densité ne deviennent significatives dans les équations de bilan que dans le cas où elles apparaissent dans un terme du type $g\rho'$, ou g est l'accélération due à la gravité. En résumé, les changements de densité résultant des changements de température ne sont importants que s'ils affectent directement la flottabilité (deuxième approximation de Boussinesq).

3.2 Décomposition de Reynolds

On décompose les champs en une valeur moyenne et une perturbation turbulente, i.e. $X = \overline{X} + X'$. On obtient une équation pour les valeurs moyennes en moyennant l'équation. La différence entre l'équation originelle et l'équation moyennée donne l'équation pour les fluctuations.

3.2.1 Équation d'état

$$\overline{P} + P' = (\overline{\rho} + \rho')R_d(\overline{T_v} + T_v') \implies \frac{\overline{P} + P'}{R_d} = \overline{\rho}\,\overline{T_v} + \overline{\rho}T_v' + \rho'\overline{T_v} + \rho'T_v'$$

Moyennant les deux membres de l'équation, il vient :

$$\frac{\overline{P}}{R_d} = \overline{\rho}\overline{T_v} + \overline{\rho' T'_v}$$

Le dernier terme $\rho' T'$ est très petit comparé aux deux autres (approximation iii) et peut donc être ici négligé. Par conséquent :

$$\boxed{\frac{\overline{P}}{R_d} = \overline{\rho}\overline{T_v}} \tag{3.7}$$

Soustrayant cette dernière équation à l'équation **??**, et négligeant les termes du second ordre, il vient :

$$\frac{P'}{\overline{P}} = \frac{\rho'}{\overline{\rho}} + \frac{T'}{\overline{T}}$$

Les fluctuations de pression (statiques ou dynamiques) sont très petites dans l'atmosphère. En conséquence, les fluctuations relatives de pression sont généralement négligeables devant les fluctuations relatives de température ou de densité. Il vient :

$$\boxed{\frac{\rho'}{\overline{\rho}} = -\frac{T'}{\overline{T}}} \tag{3.8}$$

ou

$$\boxed{\frac{\rho'}{\overline{\rho}} = -\frac{\theta'_v}{\overline{\theta_v}}} \tag{3.9}$$

3.2.2 Équation de continuité

Pour un fluide incompressible, $\partial\rho/\partial t$ est nul, (hypothèse ii), et :

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0, \tag{3.10}$$

C'est une bonne approximation dans la CLA, la divergence de la vitesse peut donc être considérée comme nulle dans la CLA.

Si on introduit la convention de Reynolds pour la décomposition de la vitesse (u_j) en un terme moyen ($\overline{u_j}$) et un terme fluctuant (u'_j) tel que :

$$u_j = \overline{u_j} + u'_j,$$

alors l'Eq. 3.10 s'écrit :

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0,$$

et en prenant la moyenne on obtient :

$$\frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_j} = 0,$$

et par conséquent :

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0, \tag{3.11}$$

la divergence de vitesse moyenne ainsi que la divergence des fluctuations de vitesse sont nulles dans la CLA.

Forme «flux» des termes d'advection

Toutes les équations pronostiques contiennent des termes d'advection de la forme :

$$u_j \frac{\partial X}{\partial x_j}$$

où X représente n'importe quelle variable, composante du vent, température, etc... En multipliant l'équation de continuité (3.10) par X, on obtient $X\partial u_j/\partial x_j = 0$. Puisque ce terme est nul, on l'ajoute au terme d'advection :

$$u_j \frac{\partial X}{\partial x_j} + X \frac{\partial u_j}{\partial x_j}$$

soit :

$$u_j \frac{\partial X}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial (X u_j)}{\partial x_j} \tag{3.12}$$

3.2.3 Équations de conservation de la quantité de mouvement

Composante verticale : approximation de Boussinesq

L'équation pour la conservation de la la quantité de mouvement verticale s'écrit :

$$\rho \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} = -\rho g - \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x_j^2}$$

En appliquant la décomposition de Reynolds, il vient :

$$(\overline{\rho}+\rho')\frac{\mathrm{d}(\overline{w}+w')}{\mathrm{d}t} = -(\overline{\rho}+\rho')g - \frac{\partial(\overline{P}+P')}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2(\overline{w}+w')}{\partial x_j^2}$$

soit, en divisant par $\overline{\rho}$:

$$\left(1+\frac{\rho'}{\overline{\rho}}\right)\frac{\mathrm{d}(\overline{w}+w')}{\mathrm{d}t} = -\frac{\rho'}{\overline{\rho}}g - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P'}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2(\overline{w}+w')}{\partial x_j^2} - \frac{1}{\overline{\rho}}\underbrace{\left(\frac{\partial\overline{P}}{\partial z}+\overline{\rho}g\right)}_{=0}.$$

Le dernier terme est nul en supposant que l'état moyen obéit à l'équilibre hydrostatique.

Dans l'atmosphère $\rho'/\overline{\rho} \approx 3\times10^{-3} \ll 1$. On néglige donc $\rho'/\overline{\rho}$ devant 1. En revanche, on ne peut négliger le premier terme du membre de droite qui est du même ordre de grandeur que les autres termes de l'équation. Cette approximation constitue **l'approximation de Boussinesq**.

$$\frac{\mathrm{d}(\overline{w}+w')}{\mathrm{d}t} = -\frac{\rho'}{\overline{\rho}}g - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P'}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2(\overline{w}+w')}{\partial x_j^2} \tag{3.13}$$

En moyennant cette dernière équation, l'équation de conservation de $\overline{w}$ se réduit à :

$$\frac{\mathrm{d}\overline{w}}{\mathrm{d}t} = \nu\frac{\partial^2\overline{w}}{\partial x_j^2} \tag{3.14}$$

Soustrayant (3.14) de (3.13), on obtient l'équation pour la fluctuation :

$$\frac{\mathrm{d}(\overline{w}+w')}{\mathrm{d}t} = -\frac{\rho'}{\overline{\rho}}g - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P'}{\partial z} + \nu\frac{\partial^2(\overline{w}+w')}{\partial x_j^2}$$

En substituant les fluctuations de densité par les fluctuations de température, on obtient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}t} = \frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}g - \frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial P'}{\partial z} + \nu\left(\frac{\partial^2 w'}{\partial x_j^2}\right)} \tag{3.15}$$

Équation de conservation de la quantité de mouvement incluant l'approximation de Boussinesq

Écrivons une forme très générale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement (3.3) en incluant l'approximation de Boussinesq :

$$\frac{u_i}{\partial t} + u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -g(\delta_{i3} - \frac{\theta_v'}{\overline{\theta_v}}) + f\epsilon_{ij3}u_j - \overline{1}\overline{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2\overline{u_i}}{\partial x_j^2}. \tag{3.16}$$

En appliquant la décomposition de Reynolds et après moyennage, il vient :

$$\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \overline{u_j\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} = -g\delta_{i3} + f\epsilon_{ij3}\overline{u_j} - \overline{1}\rho\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_j}$$

En écrivant le troisième terme à gauche sous forme flux, on obtient une forme très générale de l'équation de conservation de la quantité de mouvement

$$\boxed{\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} = -g\delta_{i3} + f\epsilon_{ij3}\overline{u_j} - \overline{1}\rho\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_j}} \tag{3.17}$$

Cette équation est très semblable à l'équation de conservation originelle (3.3), excepté pour le dernier terme qui décrit l'interaction de la turbulence avec l'écoulement moyen.

Composantes horizontales

Nous réécrivons ici les équations de conservation de la quantité de mouvement horizontale sous une forme plus facile à manipuler. Les termes de gradient horizontal de pression peuvent s'exprimer en fonction des composantes du vent géostrophiques :

$$fu_g = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{et} \quad fv_g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

Les équations de conservation de la quantité de mouvement horizontale se réduisent à :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -f(v_g - v) + \nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} \tag{3.18}$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = f(u_g - u) + \nu\frac{\partial^2 v}{\partial x_j^2} \tag{3.19}$$

avec $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \equiv \dfrac{\partial}{\partial t} + u_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}$

Appliquons la décomposition de Reynolds $u = \overline{u} + u'$ sur l'équation 3.18, et moyennons l'équation obtenue :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j} + \overline{u_j'\frac{\partial u'}{\partial x_j}} = -f(v_g - \overline{v}) + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_j^2}$$

On met cette dernière équation sous forme «flux» en ajoutant l'équation de continuité multipliée par u' (eq. 3.12). Il vient :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_j} + \overline{u_j'\frac{\partial u'}{\partial x_j}} + \overline{u'\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}} = -f(v_g - \overline{v}) + \nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_j^2}$$

Sous forme «flux» :

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} & +\overline{u_j}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x_j} & = & -f(v_g-\overline{v}) & -\dfrac{\partial \overline{u'_j u'}}{\partial x_j} & +\nu\dfrac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_j^2} \\ \text{I} & \text{II} & & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array}} \tag{3.20}$$

II advection de quantité de mouvement,

III écart au géostrophisme,

IV divergence du flux turbulent de quantité de mouvement horizontal,

V divergence du flux moléculaire de quantité de mouvement horizontal

Pour l'équation sur $\overline{v}$, il vient :

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \overline{v}}{\partial x_j} = +f(u_g-\overline{u}) - \frac{\partial \overline{u'_j v'}}{\partial x_j} + \nu\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x_j^2}} \tag{3.21}$$

Nombre de Reynolds Le nombre de Reynolds Re est défini par :

$$Re = \frac{UL}{\nu} \tag{3.22}$$

où U et L sont des échelles caractéristiques de vitesse et de longueur, ν la viscosité moléculaire. Pour la couche limite, $U \sim 5$ m/s, L 100 m. Par conséquent, $Re \sim 3 \times 10^7$ dans la CLA.

Le terme de viscosité de l'équation peut s'écrire sous la forme :

$$\nu\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial x_j^2} \sim \frac{1}{Re}\left(UL\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial x_j^2}\right)$$

On vérifie aisément que le terme entre parenthèse est du même ordre de grandeur que les autres termes de l'équation (3.20). Le terme de viscosité moléculaire est donc négligeable dans le bilan de quantité de mouvement du vent moyen.

3.2.4 Conservation de l'énergie

Partant de l'équation de conservation (3.6), on décompose les variables en termes moyens et fluctuations, puis on moyenne. Le terme d'advection est écrit sous forme d'un flux.

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} & +\overline{u_j}\dfrac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} & = & \nu_\theta\dfrac{\partial^2 \overline{\theta}}{\partial x_j^2} & -\dfrac{1}{\rho c_p}\dfrac{\partial \overline{R_j}}{\partial x_j} & -\dfrac{\partial \overline{u'_j \theta'}}{\partial x_j}. \\ \text{I} & \text{II} & & \text{III} & \text{IV} & \text{V} \end{array}} \tag{3.23}$$

II advection

III diffusion moléculaire de chaleur.

IV divergence du flux radiatif.

V divergence du flux turbulent de chaleur

Pratiquement, on négligera le terme de flux moléculaire (III) devant le flux turbulent (V). Le terme de flux radiatif (IV) sera également négligé.

3.2.5 Équation de l'humidité : conservation du rapport de mélange

On part de l'équation (3.5) de conservation de la vapeur d'eau. Négligeons dans un premier temps le terme de changement de phase. Pour l'humidité spécifique moyenne, on obtient :

$$\boxed{\underset{\mathrm{I}}{\frac{\partial \overline{q}}{\partial t}} \underset{\mathrm{II}}{+\overline{u_j}\frac{\partial \overline{q}}{\partial x_j}} = \underset{\mathrm{III}}{\nu_q \frac{\partial^2 \overline{q}}{\partial x_j^2}} \underset{\mathrm{IV}}{-\frac{\partial \overline{u'_j q'}}{\partial x_j}}} \tag{3.24}$$

II advection

III diffusion moléculaire

IV diffusion turbulente

Dans la CLA, le terme de diffusion moléculaire est négligeable devant le terme de diffusion turbulente/

3.2.6 Équations simplifiées pour les champs moyens

Hypothèse d'homogénéité horizontale

La CLA est une couche peu épaisse ($\sim 1km$). En conséquence, les échelles caractérisant la variabilité des champs moyens sont beaucoup plus grandes suivant les directions horizontales que suivant la verticale. Une approximation supplémentaire, couramment employée consiste à négliger les variations horizontales des champs moyens devant les variations verticales. Implicitement, cela revient à supposer l'homogénéité horizontale des champs moyen, i.e.

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \equiv 0 \tag{3.25}$$

Hypothèse de stationnarité

Si la CLA est dynamiquement bien établie, on admet qu'un état d'équilibre est atteint et donc que le régime est stationnaire. Dans ces conditions : $\partial/\partial t \equiv 0$.

Les équations simplifiées en régime stationnaire et horizontalement homogène

Dans le cadre de ces simplifications, les équations du mouvement (3.20) et (3.21) s'écrivent :

$$\boxed{f(\overline{v} - v_g) = \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}\,, \qquad -f(\overline{u} - u_g) = \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z}\,, \qquad \overline{w} = 0} \tag{3.26}$$

Les équations de conservation de l'énergie (3.23) et de la vapeur d'eau (3.24) se réduisent à :

$$\boxed{\frac{\partial \overline{w'\theta'}}{\partial z} = 0} \tag{3.27}$$

$$\boxed{\frac{\partial \overline{w'q'}}{\partial z} = 0.} \tag{3.28}$$

3.3 Bilan de l'énergie cinétique turbulente

Pour décrire l'état de la CLA, on cherche les équations d'évolution pour les moments d'ordre deux des fluctuations, i.e. les variances des fluctuations de vitesse (l'énergie cinétique), de température et d'humidité.

On part des équations des perturbations issues des équation de bilan de la quantité de mouvement, de l'enthalpie et de l'humidité spécifique. Pour cela, on fait la différence entre les équations pour les variables instantanées, u_i, θ et q, (eqs. ((3.3), 3.6) et 3.5), et les équations pour les variables moyennées, $\overline{u_i}$, $\overline{\theta}$ et $\overline{q}$, (eqs. (3.20), 3.23) et 3.24). Il vient :

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} = \frac{\rho'}{\overline{\rho}^2}\frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} - 2\Omega\epsilon_{ij3}\eta_i u_j' - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2} + \frac{\partial\overline{(u_i'u_j')}}{\partial x_j}, \quad (3.29)$$

où $(\rho'/\rho^2)(\partial\overline{p}/\partial x_i)$ peut aussi s'écrire $g\delta_{i3}(\theta'/\overline{\theta})$.

$$\frac{\partial \theta'}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial \theta'}{\partial x_j} = \nu_\theta\frac{\partial^2 \theta'}{\partial x_j^2} + \frac{1}{\rho C_p}\frac{\partial R_j'}{\partial x_j} + \frac{\partial\overline{u_j'\theta'}}{\partial x_j}. \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial q'}{\partial t} + \overline{u_j}\frac{\partial q'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial \overline{q}}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial q'}{\partial x_j} = \nu_q\frac{\partial^2 q'}{\partial x_j^2} + \frac{\partial\overline{u_j'q'}}{\partial x_j}. \quad (3.31)$$

Pour établir l'équation de l'énergie cinétique turbulente, on multiplie (3.29) par u_i' et on moyenne :

$$\underset{\text{I}}{\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{u_i'^2}}{\partial t}} \underset{\text{II}}{+\frac{\overline{u_j}}{2}\frac{\partial\overline{u_i'^2}}{\partial x_j}} \underset{\text{III}}{+\overline{u_i'u_j'}\frac{\partial\overline{u_i}}{\partial x_j}} \underset{\text{IV}}{+\frac{u_j'}{2}\frac{\partial\overline{u_i'^2}}{\partial x_j}} = \underset{\text{V}}{g\delta_{i3}\frac{\overline{w'\theta'}}{\overline{\theta}}} \underset{\text{VI}}{-f\epsilon_{ij3}\overline{u_i'u_j'}} \underset{\text{VII}}{-\overline{\frac{u_i'}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}}} \underset{\text{VIII}}{+\nu\overline{u_i'\frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}}} \underset{\text{IX}}{+\overline{u_i'\frac{\partial\overline{(u_i'u_j')}}{\partial x_j}}}, \quad (3.32)$$

Le terme IX correspond à la moyenne d'une fluctuation que multiplie une valeur moyenne : il est donc nul. Par ailleurs le terme IV peut se réécrire :

$$\overline{u'_j\frac{\partial u_i'^2}{\partial x_j}} = \frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(u_j'u_i'^2)} - \underbrace{\overline{u_i'^2\frac{\partial u_j'}{\partial x_j}}}_{=0}. \quad (3.33)$$

Le dernier terme est nul (équation de continuité multiplié par $u_i'^2$ et moyenné).

Le terme VII de perturbation de pression s'écrit :

$$-\overline{\frac{u_i'}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\partial\overline{(u_i'p')}}{\partial x_i} + \underbrace{\overline{\frac{p'}{\overline{\rho}}\frac{\partial u_i'}{\partial x_i}}}_{\text{terme de redistribution}}. \quad (3.34)$$

Le deuxième terme à droite de l'égalité est nul quand on somme sur les 3 composantes (équation de continuité). Donc ce terme ne modifie par le bilan de variance du vent, mais il concourt à redistribuer l'énergie entre les composantes. Il est souvent appelé **terme de retour à l'isotropie**.

Le terme VI (Coriolis) de (3.32) est nul. En effet :

$$\epsilon_{ij3}\overline{u_i'u_j'} = 0$$

L'accélération de Coriolis n'affecte pas le bilan d'ECT. Il s'agit donc d'un terme de redistribution d'énergie. Cependant les termes $fu_i'u_j'$ sont négligeable devant les autres termes de (3.32).

On montre que le terme VIII de dissipation visqueuse s'écrit :

$$\overline{\nu u_i' \frac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}} = \frac{1}{2}\underbrace{\nu \frac{\partial^2 \overline{u_i'^2}}{\partial x_j^2}}_{\approx 0} - \underbrace{\nu \overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2}}_{\epsilon_k} \tag{3.35}$$

car $\dfrac{\partial^2 u_i'^2}{\partial x_j^2} = \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(2u_i'\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right) = 2\left(\dfrac{\partial u_i'}{\partial x_j}\right)^2 + 2u_i'\dfrac{\partial^2 u_i'}{\partial x_j^2}$

Le premier terme de (3.35) représente la divergence du flux moléculaire d'ECT. Ce terme est négligeable.

Si la turbulence est homogène, la variance des variables dynamiques et thermodynamiques est faible : alors de terme redistribution par la pression est généralement très petit devant le terme de dissipation car le gradient de vitesse de fluctuation $\partial u_i'/\partial x_j$ sont grands alors que les gradients de variance des fluctuations de $\partial \overline{u_i'^2}/\partial x_j$ est petit.

L'équation de l'évolution de l'énergie cinétique turbulente est obtenue en prenant $E_k = \Sigma_i \overline{u_i'^2}/2$:

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} \dfrac{\partial E_k}{\partial t} & = & -\dfrac{\partial}{\partial x_j}\left[\overline{u_i'^2 u_j'} + \dfrac{1}{\rho}\overline{u_j' p'}\right] & - & \overline{(u_i'u_j')}\dfrac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} & + & \dfrac{g}{\overline{\theta}}\overline{(w'\theta')} & - & \epsilon_k. \\ \text{I} & & \text{II} & & \text{III} & & \text{IV} & & \text{V} \end{array}} \tag{3.36}$$

II divergence d'un flux : terme nul si on l'intègre sur l'épaisseur de la CLA,

III production d'ECT par cisaillement de vent,

IV flux de flottabilité :
- production d'ECT par flottabilité ($\overline{w'\theta'} > 0$),
- conversion d'ECT en EPT ($\overline{w'\theta'} < 0$)

V dissipation visqueuse ($\epsilon_k > 0$).

Le caractère de l'écoulement turbulent dépend du signe de IV et de l'importance relative de III et de IV et (i.e. production ou absorption suivant la stabilité de l'atmosphère.

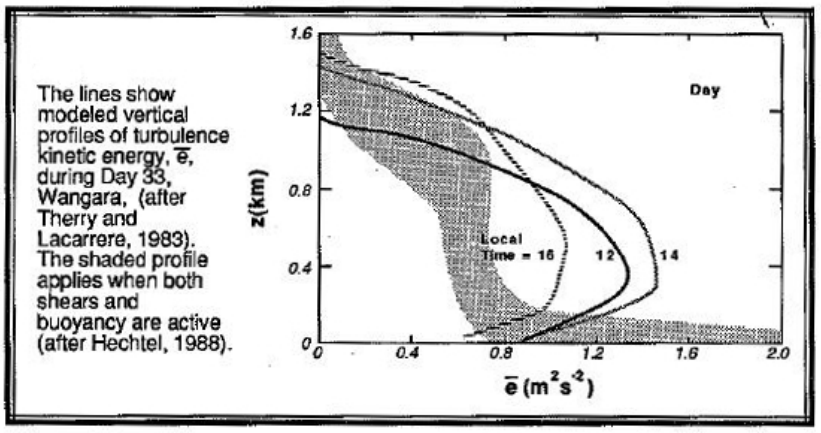


FIGURE 3.1 – Exemples de profils vertical d'ECT (d'après Stull (1988)).

.

CLA horizontalement hommogène

Dans le cas d'une CLA homogène horizontalement, l'équation (3.36) peut se simplifier :

$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} \dfrac{\partial E_k}{\partial t} & = & -\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\overline{w'u'^2}+\overline{w'v'^2}+\dfrac{1}{\rho}\overline{w'p'}\right) & -\overline{(w'u')}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z} & -\overline{(w'v')}\dfrac{\partial \overline{v}}{\partial z} & +\dfrac{g}{\overline{\theta}}\overline{(w'\theta')} & -\epsilon_k \\ & & & & & & \\ \text{I} & & \text{II} & \text{III} & \text{IV} & \text{V} & \text{VI} \end{array}} \tag{3.37}$$

II	Divergence d'un flux
III & IV	termes de production (> 0 dans la CLA)
V	terme de flottabilité (> 0 si instable, < 0 si stable)
VI	dissipation visqueuse

$$\boxed{\frac{\partial E_k}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\rho}\overline{w'p'}\right) - \overline{(w'u')}\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{(w'v')}\frac{\partial \overline{v}}{\partial z} + \frac{g}{\overline{\theta}}\overline{(w'\theta')} - \epsilon_k.} \tag{3.38}$$

La figure 3.1 montre un exemple de profil d'ECT (modèle). En ordre de grandeur, l'ECT turbulente est ~ 1 J/kg dans la CLA diurne.

La figure3.2 montre l'importance relative des différents termes intervenants dans l'équation de bilan de l'ECT.

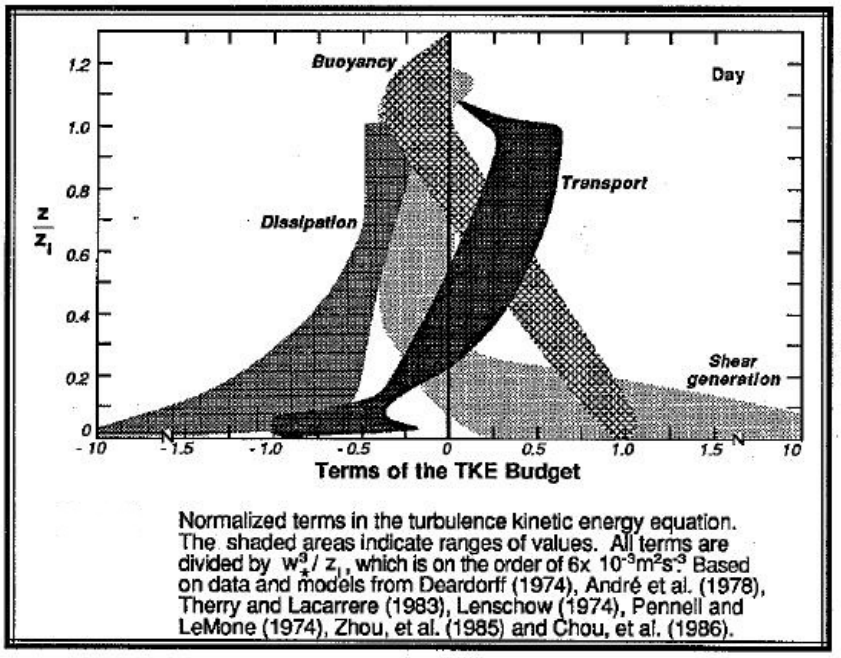


FIGURE 3.2 – Estimation de l'importance relative des différents termes de l'équation d'évolution de l'ECT. Les termes sont normalisés (divisés par w_*^3/z_i, w_* étant une échelle de vitesse qui sera défini plus loin). En ordonnée, l'altitude z normalisée par la hauteur de la CLA, z_i (d'après Stull (1988))

.

Interaction écoulement moyen–turbulence

Les termes III et IV de l'équation (3.37) décrivent l'énergie apportée à la turbulence par l'écoulement moyen. L'énergie cinétique alimentant la turbulence est perdue pour le vent moyen. Pour s'en convaincre, multiplions l'équation pronostique pour $\overline{u_i'}$ (eq. 3.17) par $\overline{u_i'}$. Il vient :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u_i}^2}{\partial t} + \frac{\overline{u_j}}{2}\frac{\partial \overline{u_i}^2}{\partial x_j} = -g\delta_{i3}\overline{u_i} + f\epsilon_{ij3}\overline{u_i u_j} - \overline{u_i}\rho\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu\overline{u_i}\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \overline{u_i}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j}$$

Le dernier terme peut se réécrire :

$$\overline{u_i}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_j} = \frac{\partial(\overline{u_i' u_j'}\,\overline{u_i})}{\partial x_j} - \overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j}$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \overline{u_i}^2}{\partial t} + \frac{\overline{u_j}}{2}\frac{\partial \overline{u}^2}{\partial x_j} = -g\delta_{i3}\overline{u_i} + f\epsilon_{ij3}\overline{u_i u_j} - \overline{u_i}\rho\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu\overline{u_i}\frac{\partial^2 \overline{u_i}}{\partial x_j^2} - \frac{\partial(\overline{u_i' u_j'}\,\overline{u_i})}{\partial x_j} + \overline{u_i' u_j'}\frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} \tag{3.39}$$

En comparant les équations pronostiques pour l'énergie cinétique du vent moyen (3.39) et pour l'énergie cinétique turbulente (3.38), on observe que le terme de production d'ECT apparaît bien dans ces deux équations avec un signe opposé :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial \overline{u}^2}{\partial t} &= \cdots + \overline{u'w'}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_k}{\partial t} &= \cdots - \overline{u'w'}\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z}. \end{cases}$$

Ce terme décrit **l'interaction** entre l'écoulement moyen et la turbulence. L'énergie alimentant la turbulence est prélevée à l'écoulement moyen.

3.4 Nombres de Richardson

On définit le nombre de Richardson de flux (sans dimension) afin de caractériser la turbulence :

$$\boxed{R_F = \frac{\dfrac{g}{\overline{\overline{\theta}}}\overline{w'\theta'}}{\overline{w'u'}\left(\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial z}\right)} = \frac{\text{production thermique de } E_k}{\text{production dynamique de } E_k}} \tag{3.40}$$

et le nombre de Richardson de gradient (sans dimension) :

$$\boxed{R_i = \frac{g}{\overline{\theta}} \frac{\partial \overline{\theta}/\partial z}{(\partial \overline{u}/\partial z)^2}} \tag{3.41}$$

R_i est facilement mesurable, contrairement à R_F. Par contre, R_F donne une bien meilleure information de la nature de la turbulence.

Remarquons d'abord que le dénominateur est généralement négatif dans la CLA (flux de quantité de mouvement vers le bas associé à un gradient vertical de vent horizontal positif).

- Pour une atmosphère statiquement instable (convection libre) $R_F < 0$.
- Si $R_F > 0$ l'écoulement est statiquement stable.
- Si $R_F > 1$ la stratification est si forte que la turbulence ne peut se développer.
- Si $0 < R_F < 1$, l'écoulement demeure turbulent s'il était auparavant turbulent : une partie de l'énergie turbulente est convertie en énergie potentielle turbulente. Si l'écoulement est initialement laminaire, la turbulence ne peut se déclencher, le critère d'instabilité dynamique n'étant pas atteint.

Chapitre 4 Les échelles de la turbulence

Il est d'usage d'adimensionnaliser les variables afin d'atteindre à une représentation généralisable des propriétés de la CLA. On définit donc des échelles caractérisant tel ou tel type de couche limite (couche de surface, couche mélangée, etc).

4.1 Échelles de la turbulence

Il est fréquent d'adimensionnaliser les variables afin d'atteindre à une représentation plus générale. Par exemple, on représentera les profils des grandeurs turbulentes en fonction de l'altitude normalisée par la hauteur de couche limite (figure 3.2 et 4.1). Cette normalisation a pour objet d'effacer la variabilité liée à la variation diurne de la hauteur de couche limite.

Autre exemple : les termes de bilan de l'ECT (figure 3.2) sont adimensionnalisés par division par w_*^3/z_i où w_*^3 est une échelle de vitesse.

4.1.1 Échelles de la turbulence d'une couche en convection libre

Pour une **couche limite en convection libre**, quelques échelles caractéristiques sont maintenant décrites.

Échelle de longueur

En convection libre, les thermiques sont les mouvements turbulents de plus grande échelle. Les tourbillons turbulents de plus petite échelle sont alimentés par ces thermiques. Les thermiques s'élèvent jusqu'à la couche d'inversion (i.e. le sommet de la couche limite). La longueur caractérisant les plus grands mouvements turbulents d'une couche limite convective est dont z_i, la hauteur de couche limite.

Échelle de longueur pour une couche mélangée : $\boldsymbol{z_i}$

Typiquement, $z_i \sim$ 1000-2000 m.

Échelle de vitesse convective

Le chauffage solaire du sol est la source d'un intense flux de chaleur vers le haut. Le flux de flottabilité associé à ce flux de chaleur alimente les thermiques. Le flux de flottabilité est : $\frac{g}{\theta}\overline{\theta' w'}$.

À partir du flux cinématique de chaleur au niveau de la surface $(\theta' w')_s$ et de la hauteur de couche limite, deux variables caractérisant la CLA convective, on définit **l'échelle de vitesse pour la convection libre**, ou plus simplement **l'échelle de vitesse convective $\boldsymbol{w_*}$** [1] :

$$\boxed{w_* = \left(z_i \frac{g}{\theta} (w'\theta')_s \right)^{1/3}} \tag{4.1}$$

Cette échelle caractérise assez bien la vitesse verticale des thermiques. Pour des couches convectives profondes résultant d'un chauffage intense, $w_* \sim$ 1-2 m/s.

Échelle de temps convective

En combinant la hauteur de couche limite z_i et l'échelle de vitesse convective w_*, on obtient une échelle de temps :

$$\boxed{t_* = \frac{z_i}{w_*}} \tag{4.2}$$

Échelle de température pour la couche mélangée

Une échelle de température pour la couche mélangée (CM) est définie par :

$$\boxed{\theta_*^{\mathrm{CM}} = \frac{(w'\theta')_s}{w_*}} \tag{4.3}$$

Cette échelle comprise entre 0.01 et 0.3 K caractérise la perturbation de température induite par les thermiques.

1. Cette échelle est aussi appelée échelle de vitesse de Deardorff

Échelle d'humidité pour la couche mélangée

De même on définit une échelle d'humidité pour la couche mélangée :

$$\boxed{q_*^{\mathrm{CM}} = \frac{(w'q')_s}{w_*}} \tag{4.4}$$

Cette échelle comprise entre 0.01 et 0.5 $\mathrm{g_{eau}/kg_{air}}$ caractérise l'excès d'humidité associé aux thermiques.

4.1.2 Échelles de la turbulence pour une couche de surface

Échelle de friction

À partir de la contrainte de Reynolds au niveau de la surface, τ_{R}, on définit la **vitesse de friction u_*** :

$$\boxed{u_* = \sqrt{\frac{|\tau_{\mathrm{R}}|}{\overline{\rho}}} \equiv \left(\overline{u'w'}^2 + \overline{v'w'}^2\right)^{1/4}}$$

Longueur d'Obukhov

La longueur d'Obukhov est un paramètre utilisé dans la couche de surface. La couche de surface (5-10% de la CLA) est une région où les flux turbulents sont quasi constants (ils varient de moins de 10%). En supposant les flux constants, on utilise les flux de chaleur et de quantité de mouvement à la surface pour définir des échelles de turbulence.

Le point de départ consiste à adimentionnaliser l'équation pour l'ECT en multipliant celle-ci par $(-\kappa z/u_*)$ où κ est la «constante» de von Karman ($\kappa \approx 0.4$). Les termes comprenant les flux cinématiques de chaleur $(w'\theta')_s$ et de quantité de mouvement $(w'u')_s$ s'écrivent :

$$\frac{-kz}{u_*^3}\frac{\mathrm{d}E_k}{\mathrm{d}t} = \cdots - \frac{kz}{u_*^3}\frac{g}{\overline{\theta}}(\overline{w'\theta'})_s + \frac{kz}{u_*^3}(\overline{u_i'u_j'})_s\frac{\partial \overline{U}}{\partial z} + \cdots \tag{4.5}$$

Il est d'usage d'écrire le premier terme sous la forme : $\zeta = z/L$, où L est la **longueur d'Obukhov** :

$$\boxed{L = \frac{-u_*^3}{\kappa\,\dfrac{g}{\overline{\theta}}(w'\theta')_s}} \tag{4.6}$$

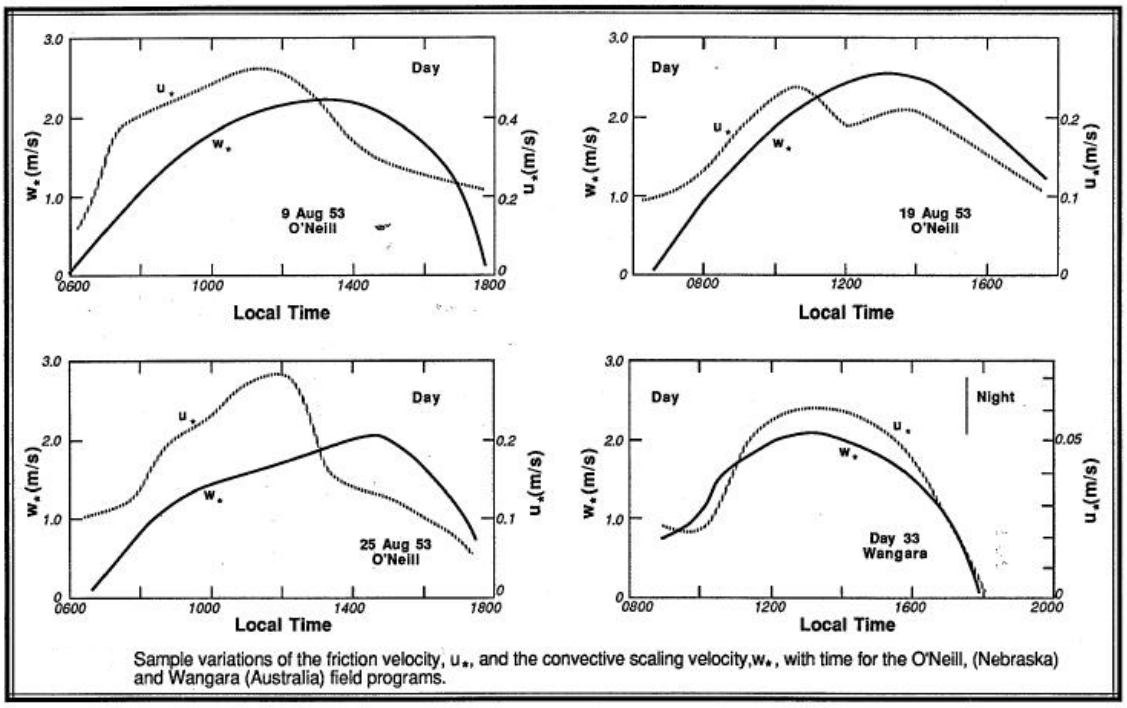


FIGURE 4.1 – Vitesses de friction (u_*) et convective (w_*)

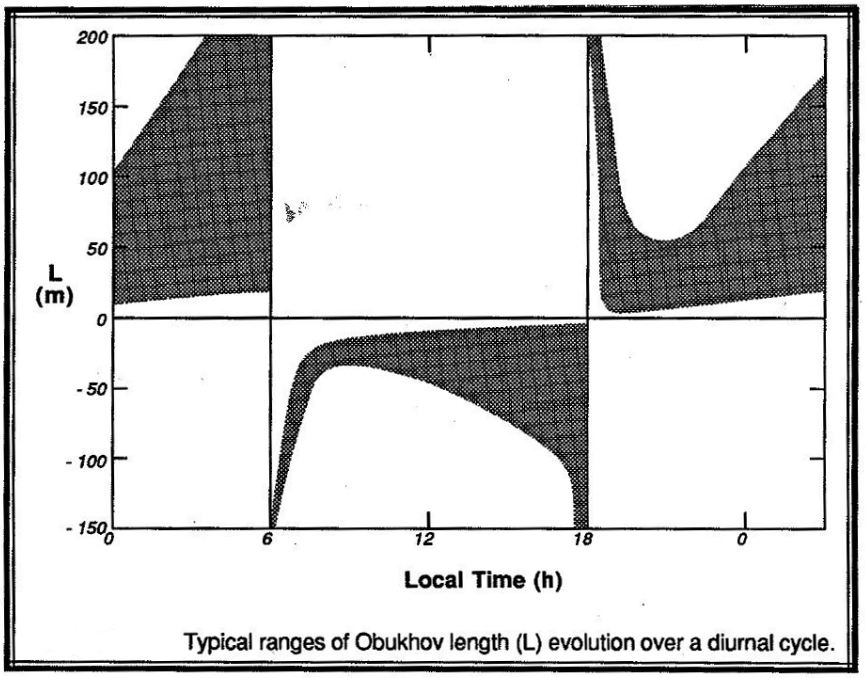


FIGURE 4.2 – Longueur d'Obukhov

La valeur absolue de la longueur d'Obukhov caractérise la hauteur au dessous de laquelle le cisaillement est le processus dominant de génération de turbulence. Pour une situation convective, les termes de production de turbulence par flottabilité et par cisaillement sont approximativement égaux pour $z \sim -0,5\ |\mathrm{L}|$.

L est parfois qualifiée de «paramètre de stabilité». Le signe de L dépend de la stabilité statique : $L > 0$ si stable, $L < 0$ si instable.

La figure 4.3 montre les variations du nombre de Richardson de gradient, $R - i$, en fonction de $\zeta = z/L$ dans la couche de surface. En situation instable, $R_i \approx z/L$.

Cisaillement adimentionné

En notant que $u_*^2 \sim -(u'w')_s$, le terme de l'équation (4.5) comprenant le flux cinématique de quantité de mouvement $(u'w')$ peut s'écrire :

$$\frac{kz}{u_*^3}(\overline{u_i'u_j'})_s\frac{\partial \overline{U}}{\partial z} = \frac{kz}{u_*}\frac{\partial \overline{U}}{\partial z}$$

Cette expression permet de définir un cisaillement adimensionné :

$$\boxed{\Phi_U = \frac{kz}{u_*}\frac{\partial \overline{U}}{\partial z}} \tag{4.7}$$

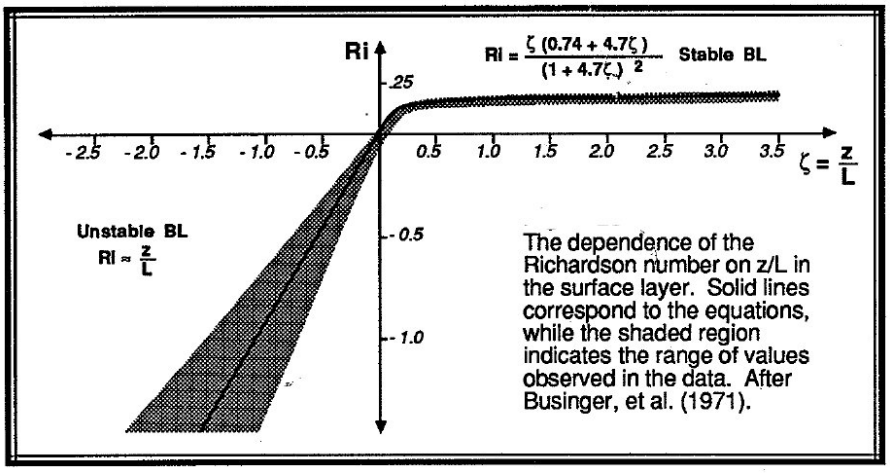


FIGURE 4.3 – R_i en fonction de z/L où L est la longueur d'Obukhov

On définit de même les gradients adimentionnés de température Φ_θ et d'humidité Φ_q :

$$\boxed{\Phi_\theta = \frac{kz}{\theta_*^{CS}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}} \tag{4.8}$$

$$\boxed{\Phi_a = \frac{kz}{q_*^{CS}} \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z}} \tag{4.9}$$

où θ_*^{CS} et θ_*^{CS} sont les température et humidité caractéristiques de la couche de surface (CS) :

$$\boxed{\theta_*^{\mathrm{CS}} = \frac{-(w'q')_s}{u_*}} \quad \text{et} \quad \boxed{q_*^{\mathrm{CS}} = \frac{-(w'q')_s}{u_*}} \tag{4.10}$$

Chapitre 5 Fermeture des équations de la turbulence

Les équations pronostiques pour les quantités moyennes contiennent des termes de covariance des fluctuations, i.e. des moments d'ordre 2. Ces covariances décrivent des flux turbulents. Elles sont autant de nouvelles inconnues du système d'équations qui contient donc plus d'inconnues que d'équations. Ces inconnues peuvent être calculées au moyen de nouvelles équations pronostiques ou sinon doivent paramétrisées (fermeture d'ordre 1). Les fermetures d'ordre 2 nécessitent le calcul, ou la paramétrisation, de moments d'ordre 3. Nous décrivons ici quelques méthodes de fermeture.

5.1 Le problème de la fermeture des équations de la turbulence

Réécrivons les équations pronostiques simplifiées pour les moments d'ordre 1.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} &= f(\overline{v} - \overline{v}_g) - \frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z} \\
\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} &= -f(\overline{u} - \overline{u}_g) - \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \\
\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{\theta'w'}}{\partial z} \\
\frac{\partial \overline{q}}{\partial t} &= -\frac{\partial \overline{q'w'}}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{5.1}
$$

On remarque que ce système d'équations pour les champs moyens n'est pas fermé puisqu'il contient plus de variables que d'équations. Par exemple, l'équation pronostique pour la température potentielle fait apparaître un terme de covariance, $\overline{w'\theta'}$, i.e. un moment d'ordre 2. Cette covariance est de fait une nouvelle inconnue pour laquelle on peut écrire une équation pronostique. Malheureusement, cette nouvelle équation fait apparaître des moments d'ordre 3, comme par exemple dans l'équation d'évolution de l'énergie cinétique (eq. 3.38).

Quatre nouvelles variables, des moments d'ordre 2, sont apparues dans les équations simplifiées des moments d'ordre 1 (les quantités moyennes). Ces nouvelles variables sont les flux turbulents $\overline{w'u'}$, $\overline{w'v'}$, $\overline{w'\theta'}$ et $\overline{w'q'}$. Nous avons donc 8 inconnues (4 d'ordre 1 et 4 d'ordre 2) pour seulement quatre équations.

La situation est même encore pire. Considérons, dans un premier temps, les trois équations (non simplifiées) pour les trois composantes du vent moyen, $\overline{u}$, $\overline{v}$ et $\overline{v}$. Ces trois équations contiennent 9 inconnues, dont 6 inconnues d'ordre 2 : $\overline{u'^2}$, $\overline{v'^2}$, $\overline{w'^2}$, $\overline{u'w'}$, $\overline{v'w'}$ et $\overline{u'v'}$. Les équations pour les moments d'ordre 2 sont donc au nombre de 6. Elles contiennent 16 inconnues, dont 10 d'ordre 3. La complexité du système d'équations est croissante. C'est un problème sans fin.

On doit donc introduire des relations supplémentaires pour exprimer ces nouvelles variables. Deux approches ont été suivies : (i) la fermeture locale et (ii) la fermeture non-locale.

(i) **La fermeture locale** : on relie les flux en un point de l'espace à des quantités connues en ce même point de l'espace. Par exemple, les relations flux–gradients, exprime le flux d'une variable en fonction du gradient moyen de cette variable. Ce type de relation est très utilisée en modélisation numérique.

(ii) **La fermeture non-locale** : les flux en en point sont exprimés en fonction des quantités connues en plusieurs point de l'espace. Par exemple, lorsque la CLA est bien mélangée, i.e. $\partial\overline{\theta}/\partial z \sim 0$, un fort flux de chaleur vers le haut continue d'être produit par les thermiques ascendantes. Pour décrire de telles situations, des paramétrisations non-locales ont été développées.

Dans la suite nous ne nous intéresserons qu'à la fermeture locale.

5.1.1 Ordre des fermetures

Pratiquement, afin de rendre tractable le système d'équation décrivant la couche limite turbulence, il convient de s'arrêter à un certain ordre, et donc de paramétriser les termes d'ordre supérieurs. On parlera de fermeture d'ordre 1 si l'on conserve les équations du premier ordre. Il faut alors paramétriser les flux turbulent (termes d'ordre 2) à l'aide de quantités dérivées des moments d'ordre inférieur (1 ou 0). L'approche la plus courante consiste à supposer les flux

proportionnels aux gradients locaux, i.e. approche flux-gradient. C'est par exemple la théorie de la **longueur de mélange**.

Une approche dite d'ordre $1,5$ intègre, en plus des équations d'ordre 1, une ou plusieurs équation(s) d'évolution des moments d'ordre 2, par exemple l'ECT et la variance des fluctuations de température (voir article de Mauritsen).

Il existe également des fermetures d'ordre 0, n'impliquant aucune équation d'évolution des moments mais plutôt des relations entre paramètres. Les champs moyens sont alors directement paramétrisés comme des fonctions des coordonnées d'espace et du temps. Ces fermeture sont décrites par la **théorie de la similitude** et feront l'objet du chapitre suivant.

5.1.2 Fermeture d'ordre 1 : coefficients de diffusion turbulente

Le système d'équations (5.1) décrit l'évolution d'une CLA horizontalement homogène. Une hypothèse simple pour paramétriser les termes de covariance consiste à supposer les flux proportionnels aux gradients locaux. Cette hypothèse est construite par analogie avec la diffusion moléculaire. Il ne s'agit pas là d'une théorie rigoureuse, mais d'une approximation. Ainsi, on pose :

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{u'w'} &= -K_m \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \\ \overline{v'w'} &= -K_m \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \\ \overline{w'\theta'} &= -K_H \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} \\ \overline{w'q'} &= -K_E \frac{\partial \overline{q}}{\partial z} \end{aligned}} \qquad (5.2)$$

Les coefficients de proportionnalité K s'appellent généralement les coefficients de «viscosité turbulentes» (pour la quantité de mouvement) ou de «diffusion turbulentes» (pour la chaleur ou la matière). Par hypothèse, les flux sont contre-gradients, i.e. dirigés vers des valeurs fortes vers les valeurs faibles. Comme les gradients horizontaux sont généralement beaucoup plus faibles que les gradients verticaux, ils sont le plus souvent considérés comme négligeables.
Pratiquement, il semble que l'approximation flux-gradient soit valable pour des fluctuations turbulentes de petites échelles. Elle perd toute validité pour des fluctuations de grande échelle, comme la convection libre par exemple.

5.1.3 Longueur de mélange (Prandtl)

Comment définir les coefficients de diffusion ? La solution la plus simple résulte de la notion de longueur de mélange. Elle est due à Prandl (1925). On suppose que la turbulence transporte les parcelles fluides qui conservent certaines de leurs propriétés : vitesse horizontale, température potentielle ou humidité spécifique. La longueur de mélange caractérise la distance l_m sur laquelle une perturbation transporte ses propriétés.

Pour une parcelle d'air déplacée verticalement autour de son point d'équilibre, on peut écrire la perturbation de vitesse comme :

$$u' = -\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} z'. \tag{5.3}$$

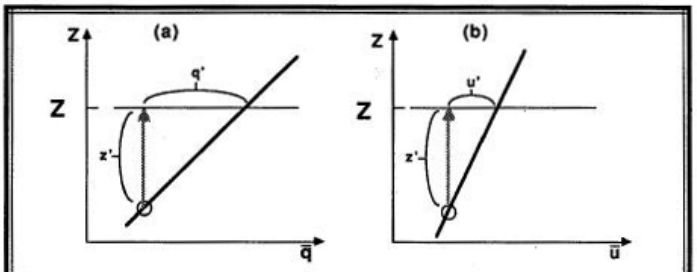


Fig. 6.1 Movement of an air parcel (shaded line) within a background having linear moisture and wind gradients (heavy line). The superposition of many such parcels, starting at different levels but all ending at level Z, forms the conceptual basis for "mixing length theory."

On suppose de plus que les fluctuations de vitesse horizontales sont reliées au déplacements verticaux et donc au terme w'. Ainsi, pour $c > 0$:

- $w' = -cu'$ si $\partial \overline{u}/\partial z > 0$
- $w' = cu'$ si $\partial \overline{u}/\partial z < 0$.

Par conséquent,

$$w' = c \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| z'. \tag{5.4}$$

En combinant (5.3) et (5.4) : $\overline{w'u'} = -c\overline{z'^2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right|$..

On obtient l'expression du coefficient de diffusion :

$$\boxed{K_m = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right|}, \tag{5.5}$$

avec la longueur de mélange

$$l_m^2 = c\overline{z'^2}\,. \tag{5.6}$$

Le coefficients K_m est proportionnel au cisaillement de vent et à la variance des déplacements verticaux.

Près du sol, la taille des déplacements est limitée par la présence de la surface. On définit alors la longueur de mélange par $l_m = \kappa z$, avec κ la «constante» de von Karman ($\kappa \approx 0.4$).

Pour la perturbation de température, et par analogie avec (5.3) on peut écrire :

$$\theta' = -\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} z', \tag{5.7}$$

Les fluctuations de vitesse verticale ne sont pas indépendantes des fluctuations de température :

$$w' = c \left| \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} \right| z' \tag{5.8}$$

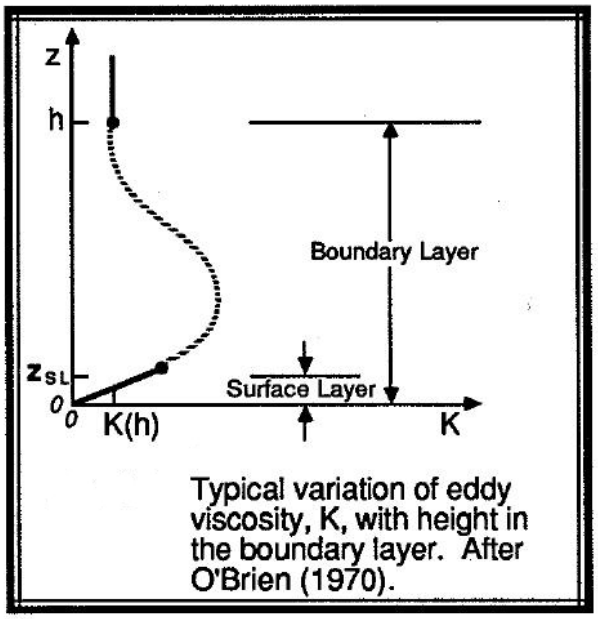


FIGURE 5.1 – Un profil typique de diffusion turbulente dans la CLA.
)

et le flux de chaleur est paramétrisé par :

$$\overline{w'\theta'} = -c\overline{z'^2}\left|\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}\right|.\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} \tag{5.9}$$

Le coefficient de diffusion turbulente de chaleur s'écrit donc :

$$K_H = l_m^2\left|\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}\right|. \tag{5.10}$$

Les coefficients K_m et K_H ne sont en aucun cas des constante physique comme le sont la viscosité ν ou la diffusion thermique ν_θ. En effet, les coefficients K dépendent de la position considérée et des caractéristiques de l'écoulement, alors que ν_θ et ν sont des caractéristiques du fluide. La diffusion thermique ν_θ est de l'ordre de 10^{-5} m^{2}s^{-1}, alors que $K_H \approx 1$ m^{2}s^{-1} (Figure 5.1).

Il existe une multitude de fermeture d'ordre 1 ou 1.5. Encore une fois, ce type de fermeture n'est applicable à des situations réelles que si les flux sont dominés par des petits tourbillons (i.e. couche limite stable ou neutre). Ces fermetures locales ne sont plus pertinentes lorsque les transferts sont dominés par la convection libre. On a alors recours à des fermeture d'ordre supérieur ou à des fermetures non locales.

5.2 Couche d'Ekman

La couche limite d'Ekman est une solution analytique aux équations du mouvement d'ordre 1 décrivant une CLA non convective. Ekman a obtenu cette solution en 1902. en paramétrisant les flux par des relations flux-gradient et en supposant constants les coefficient de viscosité turbulente.

Une solution analytique

Pour obtenir les équations décrivant la spirale d'Ekman, on part des équations simplifiées du mouvement (**??**) et (**??**) (homogénéité spatiale, viscosité moléculaire négligeable devant la viscosité turbulente, mouvement vertical moyen négligeable), en supposant de plus la stationnarité. En exprimant les flux par des relations flux-gradient avec K constant (équations 5.2), il vient :

$$f(\overline{u} - u_g) = K\frac{\partial^2 \overline{v}}{\partial z^2}. \tag{5.11}$$

$$f(\overline{v} - v_g) = -K\frac{\partial^2 \overline{u}}{\partial z^2}, \tag{5.12}$$

On additionne (5.11) et $i\times$(5.12) :

$$f(\overline{u} + i\overline{v}) - f(\overline{u_g} + i\overline{v_g}) = K\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\overline{v} - i\overline{u}). \tag{5.13}$$

Posons $u^* = \overline{u} + i\overline{v}$ et $u_g^* = \overline{u_g} + i\overline{v_g}$, on remplace dans (5.13) :

$$fu^* - fu_g^* = -iK\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2}$$

ou encore :

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial z^2} - i\frac{f}{K}u^* = -i\frac{f}{K}u_g^*, \tag{5.14}$$

avec $\omega^2 = if/K$. Après intégration :

$$u^* = u_g^* + Ae^{\omega z} + Be^{-\omega z} \tag{5.15}$$

avec

$$\omega = (1+i)\underbrace{\sqrt{\frac{f}{2K}}}_{\gamma}. \tag{5.16}$$

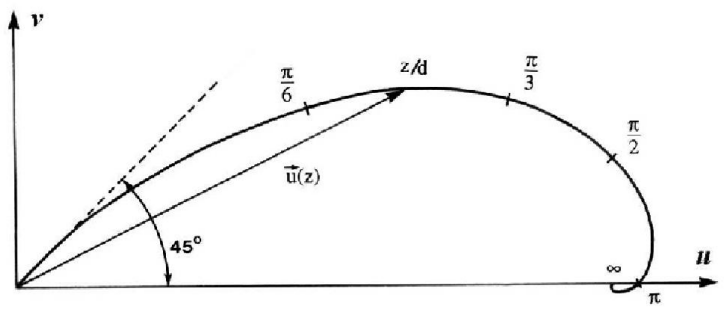


FIGURE 5.2 – Hodographe associé avec la spirale d'Ekman.

Loin de la surface ($z \to \infty$), on tend vers la solution géostrophique, ce qui impose $A = 0$. À la surface, le vent est nul ($\overline{u} = \overline{v} = \overline{u^*} = 0$) et on a $(u_g + iv_g) + (a + ib) = 0$ en posant $B = a + ib$, d'où $a = -u_g$ et $b = -v_g$. On prendra $b = 0$ pour simplifier (i.e. on choisit un système d'axe tel que $\vec{u}_g = u_g\vec{e}_x$). On obtient ainsi :

$$\overline{u} + i\overline{v} = u_g - u_g e^{-\gamma z} e^{-i\gamma z} \tag{5.17}$$

$$\overline{u} + i\overline{v} = u_g + iv_g - u_g e^{-\gamma z}(\cos\gamma z - i\sin\gamma z). \tag{5.18}$$

Il vient :

$$\begin{aligned} \overline{u} &= u_g(1 - e^{-\gamma z}\cos\gamma z) \\ \overline{v} &= u_g e^{-\gamma z}\sin\gamma z. \end{aligned} \tag{5.19}$$

Lorsque que l'on trace $\overline{v}/u_g$ en fonction de $\overline{u}/u_g$ on obtient l'hodographe de la spirale d'Ekman.

Le vent près de la surface

Pour $z \to 0$, on observe un déphasage de 45° entre le vent et le vent géostrophique. On obtient ce résultat en effectuant un développement limité (DL) à l'ordre 1 pour $\gamma z \ll 1$:

$$\sin\gamma z \to \gamma z,\ \cos\gamma z \to 1,\ e^{-\gamma z} \to 1 - \gamma z, \tag{5.20}$$

alors on obtient :

$$\frac{\overline{u}}{u_g} = \frac{\overline{v}}{u_g} = \gamma z. \tag{5.21}$$

La friction exercée par le sol réduit donc la vitesse du vent et modifie sa direction. L'intensité du vent est sub-géostrophique dans la couche d'Ekman et sa direction traverse les isobares des hautes vers les basses pressions.

L'épaisseur de la couche d'Ekman

On défini l'épaisseur de la couche d'Ekman comme l'altitude minimale z_0 à laquelle la fonction $\overline{v}/u_g$ s'annule, i.e. pour $z_0 = \pi/\gamma$. Ainsi, l'épaisseur de la couche d'Ekman est définie comme :

$$h_e = \frac{\pi}{\gamma} = \pi\sqrt{\frac{2K}{f}}. \tag{5.22}$$

Pour un coefficient de diffusion $K = K_m$ de l'ordre de 12.5 $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ et $f = 10^{-4}$ $\mathrm{s^{-1}}$, on obtient h_e de l'ordre de 1500 m.

Pour un coefficient de diffusion $K = K_m$ de l'ordre de 1 $\mathrm{m^2\,s^{-1}}$ ($f = 10^{-4}$ $\mathrm{s^{-1}}$), on obtient h_e de l'ordre de 500 m.

On considère que les solutions présentées pour la couche d'Ekman ne sont valides que pour $z \leq z_0$, i.e. jusqu'à ce que $\overline{u}(z_0) = u_g$ et $\overline{v}(z_0) = 0$ c'est à dire l'altitude minimale pour laquelle le vent est parallèle au vent géostrophique.

Profils de vent dans la couche d'Ekman

Pour comprendre l'évolution de l'hodographe de la spirale d'Ekman, on s'intéresse aux dérivées de $\overline{v}/u_g$ et $\overline{u}/u_g$ par rapport à z :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dz}\left(\frac{\overline{v}}{u_g}\right) &= e^{-\gamma z}(-\gamma\sin\gamma z + \gamma\cos\gamma z) = \gamma e^{-\gamma z}\sqrt{2}\cos(\gamma z + \pi/4)), \\
\frac{d}{dz}\left(\frac{\overline{u}}{u_g}\right) &= -e^{-\gamma z}(\gamma\cos\gamma z + \gamma\sin\gamma z) = \gamma e^{-\gamma z}\sqrt{2}\cos(\gamma z - \pi/4)).
\end{aligned} \tag{5.23}$$

On constate que $\overline{v}/u_g$ est maximum pour $\pi/4$ et que $\overline{u}/u_g$ est maximum pour $3\pi/4$. Par ailleurs, $\overline{u}/u_g$ est toujours positif, alors que $\overline{v}/u_g$ présente un minimum négatif.

Pompage d'Ekman

La conclusion majeure de la solution d'Ekman est que la friction du sol a pour conséquence
- de ralentir le vent qui est sub-géostrophique dans la couche d'Ekman ($z < \pi/\gamma$)
- de dévier le vent vers la gauche du vent géostrophique, c-à-d des hautes vers les basses pressions.

Dans une situation synoptique de hautes ou de basses pression, la déviation du vent géostrophique cause une divergence (anti-cyclone) ou une convergence (dépression). La conservation de la masse implique un mouvement vertical descendant (**subsidence**) en cas de haute pression ou montant (**ascendance**) en cas de basse pression.

Le processus induisant des mouvement verticaux suite à la friction du sol s'appelle le **pompage d'Ekman**.

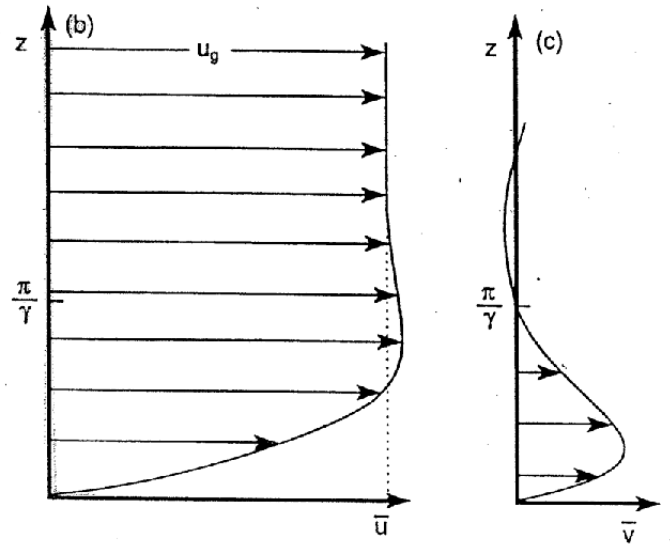


FIGURE 5.3 – Profils de vent ($\overline{u}$ et $\overline{v}$) associés avec la spirale d'Ekman.

5.2.1 Discussion

Les hypothèses sous lesquelles la couche d'Ekman a été calculée ($K =$ Const) sont rarement observées dans la couche limite atmosphérique. De fait, un tel écoulement est rarement observé. Cependant, la spirale d'Ekman constitue une bonne approximation qualitative décrivant des écoulements en couche limite neutre, avec production mécanique de turbulence (cisaillement), en l'absence de convection.

5.3 Un exemple de paramétrisation d'ordre 1,5

Mauritsen et al., A Total Turbulent Energy Closure Model for Neutrally and Stably Stratified Atmospheric Boundary Layers, J. Atmos. Sci, vol 64, pp 4113-4126, 2007, (DOI : 10.1175/2007JAS2294.1)

Chapitre 6 Théorie de la similitude

Pour la plupart des situations, nous ne savons pas dériver des solutions basées sur les équations de conservation. Cependant, les observations montrent des caractéristiques reproductibles, indépendamment des conditions aux limites. La théorie de la similitude donne un moyen de grouper et d'organiser les variables afin de mettre en évidence des relations empiriques descriptives de la CLA.

6.1 Théorie de la similitude

La théorie de la similitude est basée sur l'organisation des variables en groupes adimensionnés. Il existe une procédure permettant de systématiser cette approche : la méthode dite de «Pi-Buckingham». Le fait de former ces groupes réduit le nombre de degré de liberté du problème. On espère ensuite trouver des relations universelles entre ces groupes de variables. Le traitement ne sera pas le même pour la CS, la CM ou la couche stable, compte tenu du fait que les variables pertinentes seront différentes dans chaque cas.

Méthodologie

Les quatre étapes pour construire une description dans le cadre de la théorie de la similitude sont :

(i) choix des variables pertinentes,

(ii) définition des groupes de variables sans dimensions,

(iii) recherche de relations empiriques entre ces groupes à partir d'observations,

(iv) exprimer une «loi» basée sur une une équation obtenue par régression ou par approximations successives.

Le résultat de cette approche est une équation empirique reliant plusieurs groupes de variables pertinentes pour une situation donnée. Dans certains cas, aucune équation simple ne peut être

dérivée à partir des observations : les relations sont alors représentées graphiquement. Si cette relation obtenue est bien universelle elle sera applicable dans d'autres situations. Une telle «loi» entre deux groupes de variables adimensionnées s'appellent une **relation de similitude**.

La théorie de la similitude ne nous donne aucun élément pour prévoir les relations de similitude. Ces relations, si elles existent, sont déterminées empiriquement, sur la base des observations ou sur des hypothèses à priori.

La théorie de la similitude décrit normalement une situation d'équilibre. Elles permet de prédire les profils des grandeurs moyennes (vent, température, flux) correspondants à cette situation d'équilibre. Par conséquent, le temps est rarement considéré comme variable descriptive. D'ailleurs, d'autres variables dépendantes du temps, comme l'épaisseur de la CLA, ne peuvent être décrites de façon satisfaisante par la théorie de la similitude. Elles doivent être estimées par d'autre méthodes.

Enfin, la théorie de la similitude constitue une fermeture d'ordre 0 des équations de la turbulence. Une fois établies, les relations de similitude, permettent de diagnostiquer les profils du vent, de température potentielle, d'humidité, etc... sans q'il soit besoin de résoudre les équations d'ordre 1.

6.1.1 La méthode Pi-Buckingham

En 1914, Buckingham propose une méthode systématique pour réaliser des analyses dimensionnelles. Il a appelé les groupes de variables adimensionnés les groupes Pi, d'où le nom de cette approche : la méthode Buckingham-Pi.

La méthode est décrite étape par étape. Un exemple illustrera la démarche.

La méthode Π-Bukingham

1) Choisir les variables pertinentes pour traiter le problème. Il y a n variables.

2) Exprimer les dimensions des variables choisies. Il y a k dimensions.

3) Choisir un sous-ensemble de variables comme variables «clés» :
- le nombre de variables clés doit être égal, si possible, au nombre de dimensions k,
- toutes les dimensions doivent être représentées,
- aucun groupe sans dimension ne peut être formé à partir de ces variables clés.

4) Former les groupes Pi sans dimension en divisant les variables restantes (i.e. non-clés) par les variables clés. Il y a $(n - k)$ groupes Π.

Exemple :

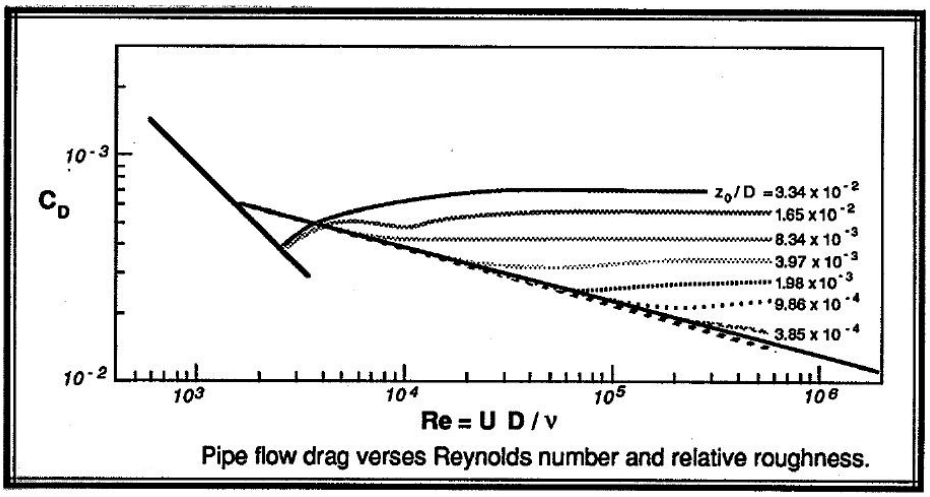


FIGURE 6.1 – Coefficient de friction C_D en fonction du nombre de Reynolds Re.

L'exemple est celui de l'expérience de Reynolds : on cherche à décrire la tension de Reynolds, τ, dans une conduite de diamètre D où coule un fluide à la vitesse $\overline{u}$. Le fluide a une viscosité ν et une masse volumique ρ. La conduite est caractérisée par une longueur de rugosité z_0.

1) Choix des variables pertinentes : τ, D, $\overline{u}$, ρ, ν, z_0.

2) $[\tau] = \mathrm{ML^2T^{-2}}$
$[\nu] = \mathrm{L^2T^{-1}}$
Il y a trois dimensions : M, L et T.

3) Choix des échelles clés : ρ, D et $\overline{u}$.

4) Formation des 3 groupes Π avec les variables restantes, τ, ν et z_0.

$$\Pi_1 = \frac{\tau}{\rho\overline{u}^2}, \quad \Pi_2 = \frac{\nu}{\overline{u}D}, \quad \Pi_3 = \frac{z_0}{D}.$$

Le groupe Π_1 décrit le coefficient de friction C_D. Le second groupe, Π_2 est l'inverse d'un nombre de Reynolds, $1/Re$. Le groupe Π_3 s'appelle la rugosité relative.

Voilà pour la méthode Pi-Buckingham. L'essentiel consiste à réaliser l'expérience permettant de mettre en évidence des relations entre groupes Π. La figure (6.1) montre un résultat expérimental : C_D en fonction de Re pour différentes valeurs de z_0/D.

Discussion : Le résultat majeur, et qui concerne l'atmosphère, est que la tension de Reynolds τ ne dépend pas du nombre de Reynolds lorsque celui-ci excède un seuil critique dépendant de la rugosité z_0, $Re_z(z_0)$. Au petit nombre de Reynolds, la tension décroît avec Re. Pour Re atteignant un seuil critique Re_c, la τ augmente indépendamment de z_0 pour ensuite décroître à nouveau, jusqu'à atteindre $Re_z(z_0)$.

Dans l'atmosphère, $Re \approx 10^6$-10^8. Pour de tels nombres de Reynolds, l'écoulement ne dépend pas de Re !

6.1.2 Les classes des échelles de similitude

Suivant les conditions de la CLA, on doit considérer différentes échelles pertinentes. Ces échelles seront celles à prendre en compte pour appliquer la théorie de la similitude.

Similitude de Monin-Obukhov

La similitude de Monin-Obukhov est applicable à la couche de surface (CS) caractérisée par des flux $\sim$ constants. Cette description est valide lorsque le vent n'est pas trop faible et $u_* \neq 0$.

Les échelles pertinentes sont : L, z_0, u_*, θ_*^{CS}, q_*^{CS}

.

où L est la longueur d'Obukhov ($L = -u_*^3/\kappa\beta_\theta Q_0$), z_0 la longueur de rugosité.

Quelques relations issues de la similitude de Monin-Obukhov seront décrites dans la suite.

Similitude dans la couche de mélange (CM)

Applicable dans la couche de mélange en convection libre.

Les échelles pertinentes sont : z_i, w_*, u_*^{CM}, θ_*^{CM}, q_*^{CM}

.

Exemple La théorie de la similitude permet de caractériser des propriétés de la CM. Considérons par exemple la variance des fluctuations de vitesse $\overline{w'^2}$ en fonction de l'altitude z.

1) Les variables pertinentes sont $\overline{w'^2}$, z, z_i, et w_*^2.

2) Les dimensions sont au nombre de 2 : L et T.

3) Échelles clés : z_i et w_*.

4) Les groupes Π : $\Pi_1 = \dfrac{z}{z_i}$, $\qquad \Pi_2 = \dfrac{\overline{w'^2}}{w_*^2}$

En traçant les données en fonction de ces variables adimensionnées, une relation de similitude apparaît clairement (figure 6.2).

La courbe grisée est approchée de façon satisfaisante par :

$$\frac{\overline{w'^2}}{w_*^2} = 1.7\left(\frac{z}{z_i}\right)^{2/3}\left(1 - 0.8\frac{z}{z_i}\right)^2 \tag{6.1}$$

Cet exemple montre l'efficacité et la simplicité de la méthode.

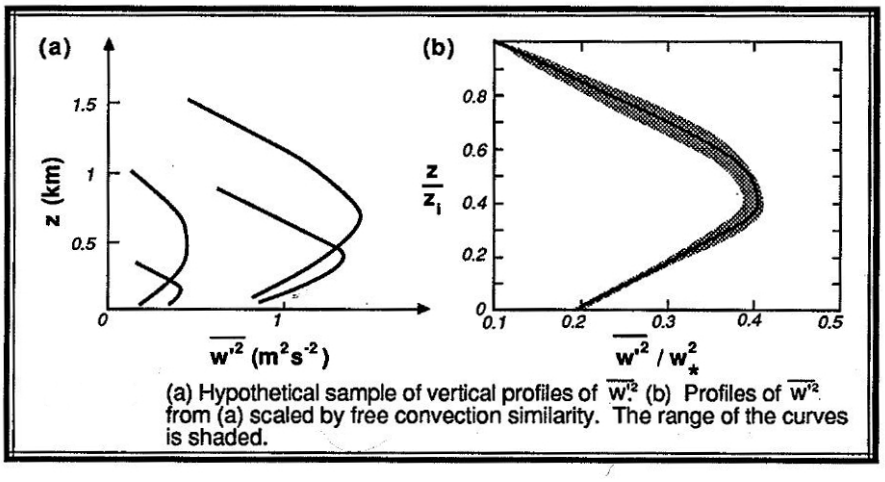


FIGURE 6.2 – (a) Profil verticaux de $\overline{w'^2}$ dans la CM. (b) Profils normalisés

.

Similitude locale de la convection libre

Applicable en couche de surface en convection libre lorsque le vent est faible ($u_* \sim 0 \implies L \sim 0$, la similitude de Monin-Obukhov ne peut s'appliquer).

Les échelles pertinentes sont : z, w_{Lf}, θ_{Lf}, q_{Lf}

.

où $w_{\mathrm{Lf}} = \left(\frac{g}{\theta_v}(\overline{w'\theta'_v})z\right)^{1/3}$ et $\theta_{\mathrm{Lf}} = \frac{\overline{w'\theta'_v}}{w_{\mathrm{Lf}}}$

6.2 La théorie de Monin-Obukhov dans la CS

La CS correspond à une couche dans laquelle les flux turbulent verticaux varient peu (moins de 10-15%). Son épaisseur est de l'ordre de 50-100 m. Sur une telle hauteur on peut négliger les variations de direction du vecteur vent avec l'altitude. On réduit ainsi le problème à une seule équation en prenant l'axe x selon la direction du vent dans la CS. Les termes relatifs aux gradients de pression et à l'accélération de Coriolis sont négligeables devant l'influence de la surface. Par contre, on ne peut négliger la viscosité moléculaire très près de la surface. On obtient donc seulement une équation de conservation de la quantité de mouvement dans la CS :

$$\nu\frac{\partial^2\overline{u}}{\partial z^2} - \frac{\partial}{\partial z}\overline{u'w'} = 0,$$

soit :

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'}\right) = 0$$

Près du sol, la contrainte, somme de la contrainte visqueuse et de la contrainte turbulence, est décrite par la vitesse de friction (ou vitesse de frottement), u_* :

$$\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} - \overline{u'w'} = u_*^2. \tag{6.2}$$

On donne le nom de "modèle à flux constant" à cette approche car la viscosité totale (moléculaire et turbulente) est constante.

De la même manière, on obtient pour le flux de chaleur :

$$\overline{\theta' w'} - \nu_\theta \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} = Q_0 \tag{6.3}$$

où $\rho_0 C_p Q_0$ représente le flux de chaleur près de la surface, Q_0 étant constant.

6.2.1 CS neutre

Dans un premier temps, on considère le cas d'une CS neutre (c.a.d. avec $\frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} = 0$). L'équation (6.2) relie les 2 inconnues $\overline{u}$ et $\overline{u'w'}$: elle n'est donc pas fermée. La résolution de l'équation (6.2) nécessite donc d'introduire une relation supplémentaire (fermeture d'ordre 1). Une telle résolution sera examinée un peu plus loin.

Résolution par la théorie de la similitude

Alternativement, la théorie de la similitude donne une solution.

1) Posons $U = |\overline{u}|$. Les variables pertinentes sont ici : ν, $\overline{u}$, z, u_*, z_0.
z_0 est la longueur de frottement. À noter que $\overline{u'w'}$ se déduit (équation 6.2).

2) Les dimensions sont L et T.

3) Deux paramètres «clés» sont : u_* et z.

4) Les trois groupes Π sont : $\Pi_1 = \dfrac{u}{u_*}$, $\Pi_2 = \dfrac{z}{z_0}$, $\Pi_3 = \dfrac{\nu}{u_* z}$

Le nombre Π_3 est l'inverse d'un nombre de Reynolds, $\Pi_3 = 1/Re$. On peut supposer, si z n'est pas trop petit, que l'écoulement ne dépend pas de Re. Dans ce cas, les groupes Π_1 et Π_2 sont reliés, la relation étant indépendante de Π_3. En se basant sur les données disponibles (figure 6.3), on s'attend à une relation logarithmique entre $\overline{u}$ et z :

$$\boxed{\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z}{z_0}\right)} \tag{6.4}$$

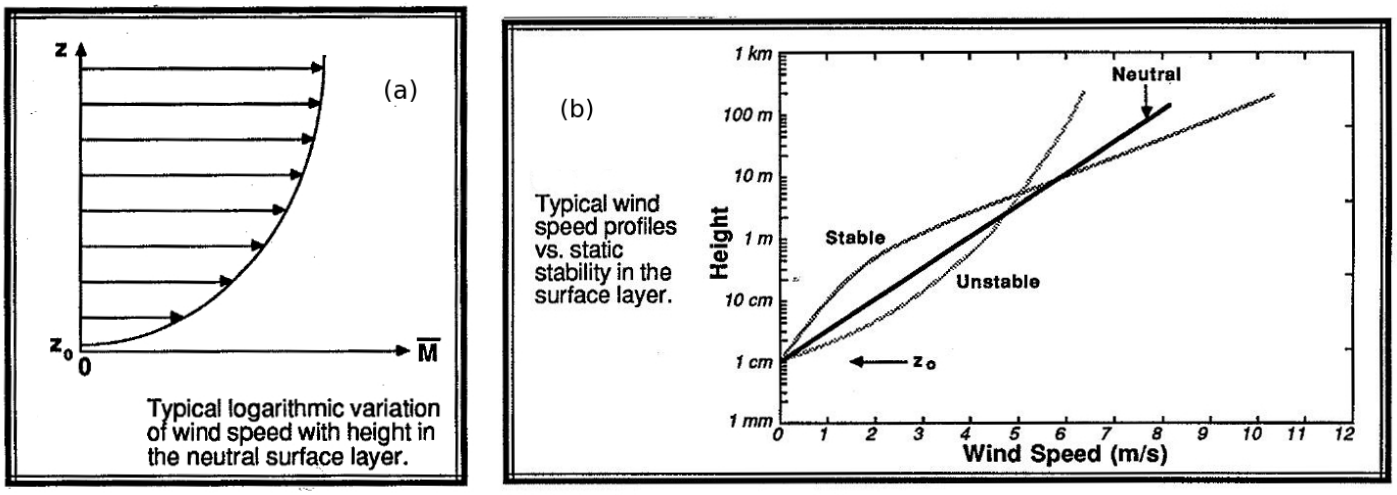


FIGURE 6.3 – (a) Profil typique de vent dans la CS neutre. (b) Profils de vent suivant les conditions de stabilité statique (échelle semi-log)

.

Résolution par la paramétrisation en K

On suppose qu'assez loin du sol, les effets de la viscosité moléculaire sont nuls, (i.e. $\nu \sim 0$). Le flux est paramétrisé par un coefficient de viscosité turbulente donné par la théorie de la longueur de mélange.

$$K_m = l_m^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right|$$

où $l_m = \kappa z$. Il vient :

$$\overline{u'w'} = -\kappa^2 z^2 \left| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \right| \frac{\partial \overline{u}}{\partial z}$$

Puisque le flux de quantité de mouvement est approximativement constant dans la CS, $\overline{u'w'} = (\overline{u'w'})_s = -u_*^2$. Finalement :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{kz} \tag{6.5}$$

L'intégration de (6.5) conduit à (6.4). Cette dérivation est plus solide que celle par la théorie de la similitude puisqu'elle ne dépend pas des résultats empiriques.

En divisant (6.5) par $(u_*/\kappa z)$, il vient :

$$\Phi_U = \left(\frac{\kappa z}{u_*} \right) \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = 1 \tag{6.6}$$

Le cisaillement adimensionné Φ_U est égal à 1 dans la couche de surface neutre.

Remarque : Les expressions (6.4) ou (6.6) relient le flux de quantité de mouvement, décrit par u_*, au profil de vitesse moyenne $\overline{u}$. Elle sont appelées des **relations flux-profils**.

z_0 **(m)**	**Types de terrain**
2×10^{-4}	Eau : mers, lacs
$2{,}4 \times 10^{-3}$	Terrains découverts avec surfaces nues, p. ex : béton, pistes d'atterrissage, gazon tondu, etc.
3×10^{-3}	Terrains agricoles découverts, sans clôtures ni haies, ev. avec des constructions éparpillées et des collines peu profilées
$5,5 \times 10^{-3}$	Terrains agricoles avec quelques bâtiments et des haies de 8 m de hauteur distantes de plus de 1 km
0.1	Terrains agricoles avec quelques bâtiments et des haies de 8 m de hauteur distantes d'env. 500 m
0.2	Terrains agricoles avec de nombreux bâtiments, des buissons et des plantes ou des haies de 8 m de hauteur distantes d'env. 250 m
0.4	Villages, petites villes, terrains agricoles avec de nombreuses haies ou de hauts arbres, forêts, terrains très accidentés
0.6	Grandes villes avec de hauts bâtiments
1.6	Grandes villes avec de hauts bâtiments et des gratte-ciels
3-70	moyenne à haute montagne

TABLE 6.1 – longueurs de rugosité

Longueur de rugosité z_0

La longueur de rugosité est définie comme la hauteur à laquelle le vent s'annule. Quoique cette hauteur ne soit pas égale à la hauteur des irrégularités du terrain, il y a une dépendance entre ces deux grandeurs. En d'autres termes, une fois la longueur de rugosité déterminée pour une terrain donné, celle-ci ne change pas suivant la vitesse du vent, la stabilité statique ou la tension visqueuse.

Des valeurs typiques de la longueur de viscosité sont indiquées dans le tableau suivant.

Des formulations empiriques ont été proposées. Par exemple, si n éléments occupent une surface S_T, le $i$ème élément de hauteur h_i occupant une surface s_i, la longueur de rugosité z_0 est estimée

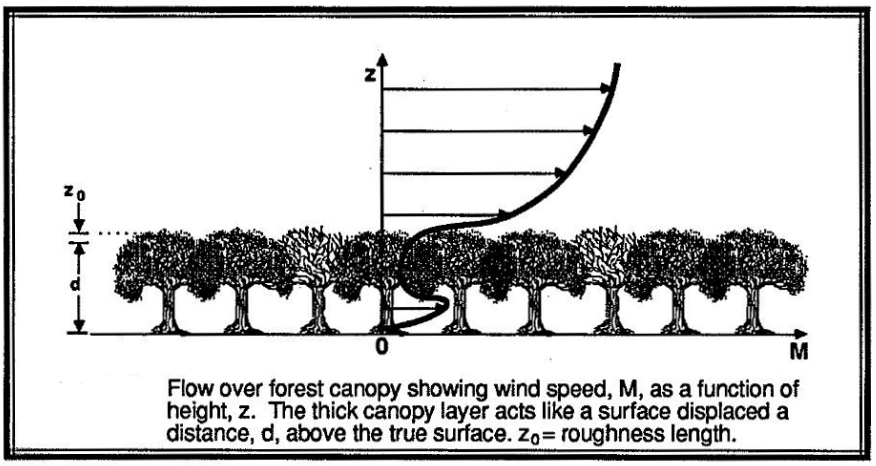


FIGURE 6.4 – Vent moyen au dessus de la canopée d'une forêt.

par

$$z_0 = \frac{0.25}{S_T} \sum_{i=1}^{n} h_i s_i \tag{6.7}$$

Pour des surfaces lisses, la mer ou une surface neigeuse ou sableuse, z_0 est estimée par :

$$z_0 = \alpha_c \frac{u_*^2}{g}. \tag{6.8}$$

Pour la mer, $\alpha_c = 0.016$.

Distance de déplacement Dans certaines conditions, comme par exemple une forêt ou un milieu urbain très dense, la longueur de rugosité est déplacée d'une distance d. Dans ces conditions,

$$\boxed{\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln\left(\frac{z-d}{z_0}\right) \qquad (z > d + z_0)} \tag{6.9}$$

Tension de surface : vitesse de friction

Sur le tracé semi-log (6.3b), la pente de la droite est proportionnelle à u_*. De fait, une fois la longueur de rugosité connue, il est aisé de déterminer la vitesse de friction, pour des conditions de stabilité neutre, à partir de la connaissance du vent à une hauteur z puisque

$$u_* = \kappa \frac{\overline{u}(z)}{\ln(z/z_0)} \tag{6.10}$$

La contrainte de Reynolds à la surface est simplement $\tau = -\rho u_*^2$.

Sous-couche visqueuse

On sait que, très près du sol, le flux turbulent $\overline{w'u'}$ doit devenir négligeable devant les effets moléculaires. Il existe une sous-couche visqueuse où :

$$\nu \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = u_*^2 \tag{6.11}$$

et donc :

$$\overline{u}(z) = \frac{u_*^2}{\nu} z. \tag{6.12}$$

On définit une longueur de frottement $z_* = \nu / u_*$. La solution (6.12) n'est valable que sur une épaisseur $\delta_v \approx \alpha_v z_*$ où α_v est supposé comme constant quelque que soit la situation ($\alpha_v = 5$).

6.2.2 La CS non neutre

Des relations flux-profils sont recherchées pour des CS non neutres. En considérant les effets moléculaires comme négligeables, i.e. $\nu \sim 0$ et $\nu_\theta \sim 0$, le système d'équation est le suivant :

$$\begin{aligned} -\overline{u'w'} &= u_*^2 \\ \overline{\theta'w'} &= Q_0 \\ \epsilon_k &= \beta_\theta \overline{w'\theta'} - \overline{u'w'} \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \end{aligned} \tag{6.13}$$

la dernière équation (conservation de l'ECT) permettant de relier les flux de quantité de mouvement et de chaleur.

Le système n'est pas fermé puisque nous avons 4 inconnues, $\overline{u}$, $\overline{\theta}$, $\overline{u'w'}$ et $\overline{\theta'w'}$, et 3 équations. Appliquons la théorie de la similitude. Le système comporte 6 variables, les 4 inconnues plus l'altitude z et l'échelle de rugosité z_0. Ceci correspond à 3 dimensions physiques [L], [T], et [Θ]. Notons qu'on peut remplacer les flux par les valeurs près de la surface exprimés par u_* et Q_0.

Les deux premiers groupes Π sont

$$\Pi_1 = \frac{\partial \overline{u}}{\partial z} \frac{z}{u_*} \equiv \frac{\Phi_U}{\kappa} \qquad \text{et} \qquad \Pi_2 = \frac{\partial \overline{\theta}}{\partial z} \frac{z}{\theta_*}$$

avec $\theta_* = -\dfrac{Q_0}{u_*}$. Il est d'usage d'écrire le troisième groupe sous la forme

$$\Pi_3 = -\frac{z\kappa\beta_\theta Q_0}{u_*^3} = \frac{z}{L}$$

de façon a faire apparaître la longueur d'Obukhov $L = -u_*^3/\kappa\beta_\theta Q_0$. Pour une stratification proches de la neutralité, c.à.d. avec $\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial z} = \dfrac{u_*}{\kappa z}$, on remarque que π_3 peut se récrire :

$$\pi_3 = \frac{\beta_\theta Q_0}{-u_*^2\frac{\partial\overline{u}}{\partial z}} = \frac{\text{production thermique de } E_K}{\text{production dynamique de } E_K} = R_F$$

La théorie de la similitude impose une relation entre Π_1 et Π_3. Par conséquent :

$$\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z}F_m\left(\frac{z}{L}\right) \tag{6.14}$$

Le même raisonnement que précédemment pourrait s'appliquer au groupe Π_2 choisi pour caractériser les gradients de température, par exemple La théorie de la similitude impose une relation entre Π_2 et Π_3

$$\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} = \frac{\theta_*}{\kappa z}F_\theta(\frac{z}{L}) \tag{6.15}$$

Le nombre de Richardson de flux, ou la longueur d'Obukhov, sont des paramètres fondamentaux pour la dynamique de la CLA. R_F est souvent évalué par le nombre de Richardson de gradient R_i, facilement déduit des mesures. Remarquons que R_F peut s'écrire :

$$R_F = \frac{\beta_\theta\overline{w'\theta'}}{\overline{u'w'}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial z}} = \frac{\kappa z\beta_\theta\theta_*}{u_*^2F_m}$$

En exprimant les flux par une expression flux-gradient, R_F et R_i sont reliés par :

$$R_F = \frac{\beta_\theta K_\theta\dfrac{\partial\overline{\theta}}{\partial z}}{K_m\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial z}\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial z}} = \frac{K_\theta}{K_m}R_i \quad \text{avec} \quad R_i = \frac{\beta_\theta\dfrac{\mathrm{d}\overline{\theta}}{\mathrm{d}z}}{\left(\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial z}\right)^2} = \frac{\kappa z\beta_\theta\theta_*F_\theta}{u_*^2F_m^2} \tag{6.16}$$

Par conséquent, le rapport $\dfrac{F_\theta}{F_m}$ s'exprime en fonction de $\dfrac{K_\theta}{K_m}$. En effet, d'après (6.16), il vient :

$$R_F = \frac{K_\theta}{K_m}R_i = \frac{K_\theta}{K_m}\frac{F_\theta}{F_m}R_F$$

et donc, $$\boxed{\frac{F_\theta\left(\dfrac{z}{L}\right)}{F_m\left(\dfrac{z}{L}\right)} = \frac{K_m}{K_\theta}.}$$

Un exemple de paramétrisation des flux de moment et de chaleur : les fonctions de Businger

Les fonctions F_θ et F_m sont déterminées à partir de résultats expérimentaux, notamment des profils verticaux de vitesse $\overline{u}$. On remarque néanmoins des contraintes sur les fonctions F. Tout d'abord, la fonction F_m doit tendre vers 1 pour des conditions de stratification neutres, i.e. pour $L \to \infty \iff z/L \to 0$. On suppose donc que la fonction $F_m(z/L)$ peut s'approcher au premier ordre par un développement limité en $z/L = 0$. soit $F_m(z/L) \approx 1 + bz/L$. En conséquence :

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial z} = \frac{u_*}{\kappa z} + \frac{bu_*}{\kappa L}$$

$$\boxed{\overline{u} = \frac{u_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0} + \frac{bu_*}{\kappa L}(z - z_0)} \tag{6.17}$$

On peut établir des contraintes sur la valeur de b en observant les profils verticaux du vent suivant les conditions de stabilité. Pour une CS stable, la turbulence est moins forte, donc le profil de vitesse est moins homogénéisé suivant la verticale. La vitesse doit donc augmenter plus rapidement avec l'altitude que dans le cas de la CS neutre (figure. Comme $L > 0$ pour une CS stable, cela implique $b > 0$ pour la CS stable. Inversement pour la CS instable, la vitesse augmente moins rapidement que dans le cas neutre. Comme $L < 0$ pour ce cas alors on trouve à nouveau $b > 0$ pour la CS instable. Les valeurs de b ne sont pas nécessairement les mêmes pour les deux paramétrisations choisies.

Sur la base de profils expérimentaux, Businger (1971), et Dyer (1974) ont proposés les fonctions F sivantes (Figure 6.5).

$$\boxed{\Phi_U = \begin{cases} = & 1 + \left(\dfrac{4.7z}{L}\right) & \text{pour } \dfrac{z}{L} > 0 \text{ (stable)} \\ = & 1 & \text{pour } \dfrac{z}{L} = 0 \text{ (neutre)} \\ = & \left[1 - \left(\dfrac{15z}{L}\right)\right]^{-1/4} & \text{pour } \dfrac{z}{L} > 0 \text{ (instable)} \end{cases}} \tag{6.18}$$

Pour le gradient (adimensionnalisé) de température potentielle :

$$\boxed{\Phi_\theta = \begin{cases} = & \dfrac{K_m}{K_\theta} + \left(\dfrac{4.7z}{L}\right) & \text{pour } \dfrac{z}{L} > 0 \text{ (stable)} \\ = & \dfrac{K_m}{K_\theta} & \text{pour } \dfrac{z}{L} = 0 \text{ (neutre)} \\ = & \dfrac{K_m}{K_\theta}\left[1 - \left(\dfrac{9z}{L}\right)\right]^{-1/4} & \text{pour } \dfrac{z}{L} > 0 \text{ (instable)} \end{cases}} \tag{6.19}$$

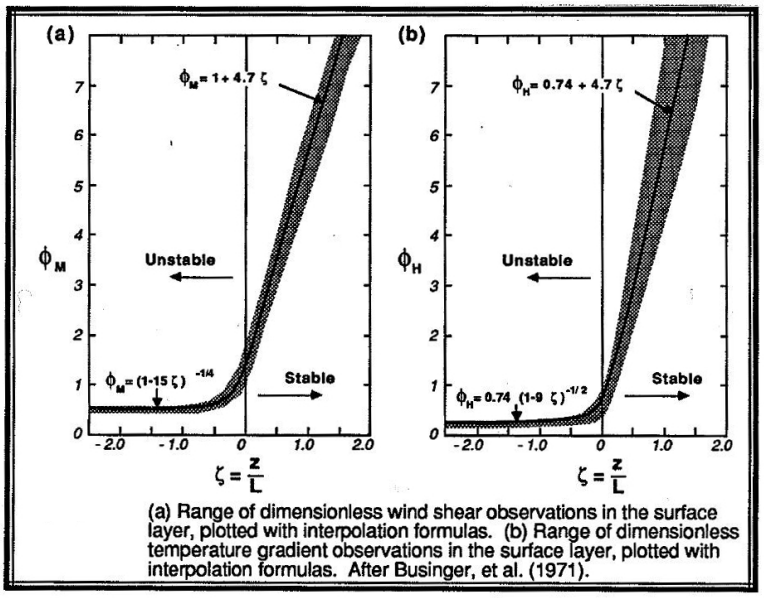


FIGURE 6.5 – Forme des fonctions F_m et F_θ en fonction du régime de stabilité (donc de L).

6.2.3 Estimation des flux et de l'échelle d'Obukhov

Pour déterminer maintenant u_*, θ_*, ou L à partir des fonctions de Businger F_θ et F_m, on doit inverser les équations 6.18 et 6.19, ce qui n'est pas nécessairement simple.

Pour la CS instable, on peut simplifier le probléme en remarquant que $R_i \approx z/L$ (voir Figure 4.3, page 48). Ceci permet donc d'estimer L à partir de R_i et d'en déduire u_* à partir de l'équation (6.18) :

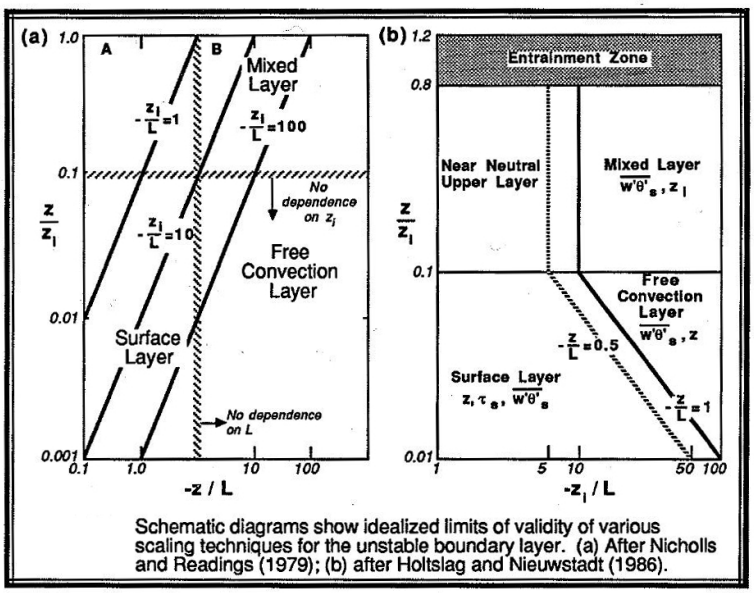
$$u_* \approx \frac{\overline{u}(z)}{\dfrac{1}{\kappa}\ln\left(\dfrac{z}{z_0}\right) + \dfrac{15}{4\kappa L}(z - z_0)}$$

Pour le cas de la CS stable on simplifie l'inversion en remarquant que la forme des fonctions F_θ et F_m est similaire (dépendance en $4.7z/L$) et donc on peut écrire que :

$$\frac{z}{\theta_*}\frac{\partial\overline{\theta}}{\partial z} = \frac{K_m}{K_\theta}\frac{z}{u_*}\frac{\partial\overline{u}}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_*}{\theta_*} = \frac{K_m}{K_\theta}\frac{(\partial\overline{u}/\partial z)}{(\partial\overline{\theta}/\partial z)} \quad \Rightarrow \quad L = \frac{u_*^2}{\kappa\beta_\theta\theta_*} = \frac{u_*}{\kappa\beta_\theta}\frac{K_m}{K_\theta}\frac{(\partial\overline{u}/\partial z)}{(\partial\overline{\theta}/\partial z)}$$

La valeur de u_* est peut être estimée à partir de la connaissance de l'intensité du vent à l'altitude z :

$$u_* \approx \frac{\overline{u}(z)}{\dfrac{1}{\kappa}\ln\left(\dfrac{z}{z_0}\right)} - 4.7\beta_\theta\frac{K_\theta}{K_m}\frac{(\partial\overline{\theta}/\partial z)}{(\partial\overline{u}/\partial z)}(z - z_0)$$



Schematic diagrams show idealized limits of validity of various scaling techniques for the unstable boundary layer. (a) After Nicholls and Readings (1979); (b) after Holtslag and Nieuwstadt (1986).

FIGURE 6.6 – Domaine de validité des échelles selon le type de CLA : CLA instable.

6.3 Les domaines d'échelles

Suivant la nature de la CLA étudiée, l'écoulement dépend de telle ou telle échelle. Par exemple, on a vu que dans la couche de surface, il convenait d'exprimer les profils en fonction de z/L, alors que dans la couche de mélange une représentation en fonction de z/z_i était plus pertinente. Les figures 6.6 et 6.7 montrent les échelles pertinentes suivant les domaines d'étude.

6.4 Le spectre d'énergie de la turbulence

Les caractéristiques des spectres de puissance des fluctuations offre une méthode puissante pour discriminer la nature des fluctuations. La densité spectrale d'énergie $S(k)$ représente la distribution d'énergie en fonction du nombre d'onde. Plus précisément, $S_U(k)\mathrm{d}k$ est l'énergie des fluctuations de vitesse dans l'intervalle de nombre d'onde k-$k + \mathrm{d}k$. Ainsi,

$$\int_0^\infty S(k)\mathrm{d}k = ECT$$

La théorie de la similitude permet d'interpréter les spectres de turbulence.

6.4.1 Le domaine inertiel

Il existe un domaine d'échelle pour lequel les fluctuations ne sont affectées ni par la viscosité, ni par les instabilités qui sont la source de l'ECT. Ces tourbillons prennent leur énergie aux

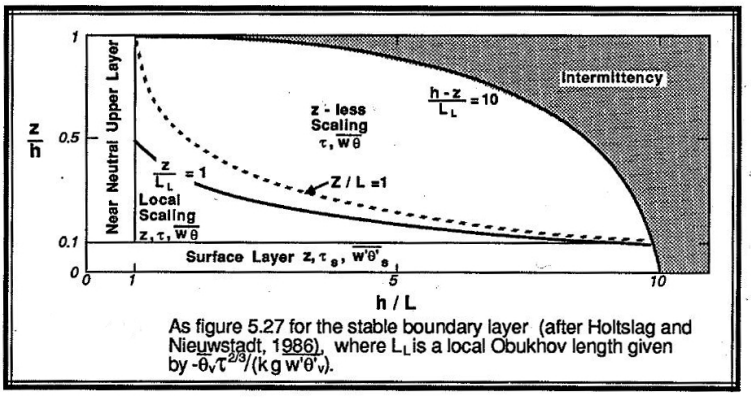


FIGURE 6.7 – Domaine de validité des échelles selon le type de CLA : CLA stable.

plus grands tourbillons et donnent une partie de leur énergie aux plus petits tourbillons. C'est la cascade de Richardson : «big wirls feed small wirls».

Pour un régime stationnaire, la cascade d'énergie est compensée par le taux de dissipation d'ECT, ϵ_K. La densité spectrale d'énergie ne dépend donc que du taux de dissipation ϵ_k.

L'analyse dimensionnelle (Pi-Bukingham) de la distribution spectrale d'énergie repose donc sur 3 variables : S_U, k et ϵ_k. On ne peut former qu'un groupe adimensionnel à partir de ces 3 variables :

$$\Pi_1 = \frac{S_U^3 k^5}{\epsilon_K^2}$$

Le groupe Π doit être constant. Par conséquent :

$$S_U(k) = \alpha_K \epsilon_K^{2/3} k^{-5/3} \tag{6.20}$$

où α_K est la constante de Kolmogorov ($1.53 \leqslant \alpha_K \leqslant 1.68$).

Un moyen simple de reconnaître un domaine inertiel de turbulence est de tracer le spectre de puissance des fluctuations (avec quelques précautions le carré de la TF) dans un graphique log-log. Le domaine inertiel apparaît comme une droite de pente -5/3 (Fig. 6.8). La figure (6.9) montre un spectre des fluctuations de température mesurées en troposphère sous ballon.

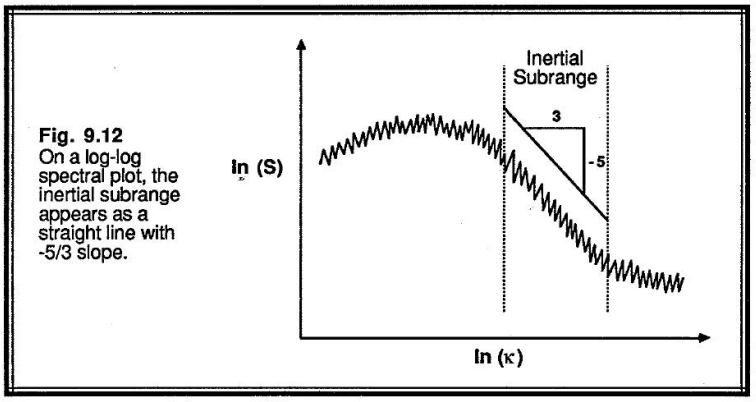


FIGURE 6.8 – Le spectre d'énergie dans le domaine inertiel

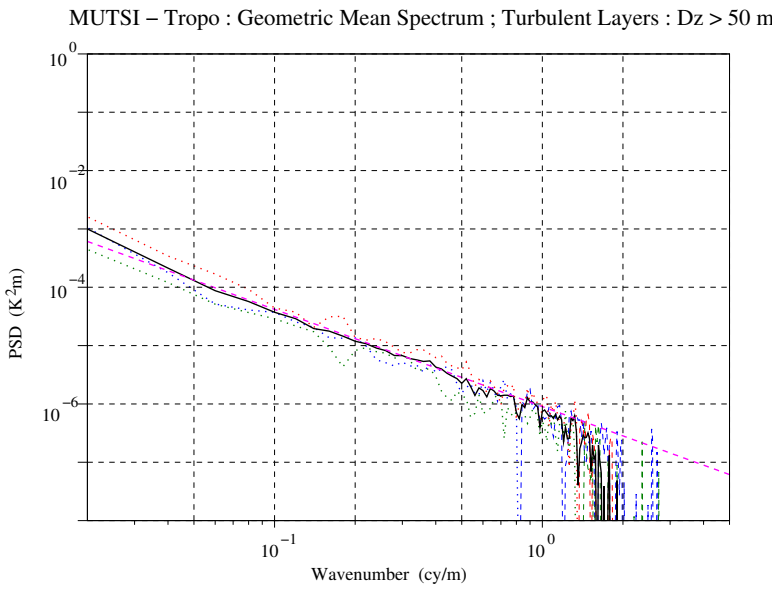


FIGURE 6.9 – Spectre des fluctuations de température mesurée dans la troposphère. La droite pointillée montre la pente -5/3.

Les humidités atmosphériques

.1 Les mesures d'humidité dans l'atmosphère

.1.1 L'humidité spécifique q de l'atmosphère non-saturée

$$q = \frac{m_v}{m_d + m_v} \qquad \text{(kg/kg)} \tag{21}$$

où m_d et m_v sont les masse d'air sec et de vapeur d'eau du volume d'air considéré.

.1.2 Le rapport de mélange r, atmosphère non saturée

$$r = \frac{m_v}{m_d} \qquad \text{(kg/kg)} \tag{22}$$

$$q = \frac{r}{1+r} \quad \text{et} \quad r = \frac{q}{1-q}$$

.1.3 L'humidité relative

$$RH = \frac{e}{e_{\mathrm{l}}} \times 100 \tag{23}$$

où e_{l} est la pression de vapeur saturante sur l'eau liquide. La pression de vapeur saturante est une fonction monotone décroissante de la température. Des expression empiriques de e_l sont données par H. Vömel (http://cires.colorado.edu/~voemel/vp.html).

Pour des températures négatives, la pression de vapeur saturante sur la glace, e_i doit être considérée (http://cires.colorado.edu/~voemel/vp.html). Pour tout $T < 0^o$C, $e_i < e_l$.

La mesure par radiosonde

Les radiosondes sont équipées de capteurs capacitifs mesurant la concentration de vapeur d'eau. La grandeur estimée est l'humidité relative par rapport à l'eau liquide. Pour les température inférieures à 0^oC, il faut corriger par le rapport e_l/e_i pour estimer les conditions de saturation sur la glace.

.2 Équation d'état de l'air humide

On considère un gaz à la pression P, température T, constitué d'un mélange d'air sec et de vapeur d'eau. En vertu de la loi de Dalton

$$P = (\rho_d R_d + \rho_v R_v)T = ((\rho - \rho_v)R_d + \rho_v R_v)\,T = \rho R_d T \left(1 + \frac{\rho_v}{\rho} + \frac{\rho_v}{\rho}\frac{R_v}{R_d}\right)$$

soit

$$P = \rho R_d T \left(1 + q(\frac{1}{\epsilon} - 1)\right) \tag{24}$$

où l'on a posé $\epsilon = R_d/R_v \approx 0,622$. Substituant $q = r/1 + r$, il vient :

$$P = \rho R_d T \frac{1 + r/\epsilon}{1 + r} \tag{25}$$

Au premier ordre :

$$P \approx \rho R_d T\,(1 + r(1/\epsilon - 1)) = \rho R_d T(1 + 0,61r) \tag{26}$$

Les relations (25) et (26) définissent la température virtuelle, T_v :

$$\boxed{Tv = T\frac{1 + r/\epsilon}{1 + r} \approx T(1 + 0,61r)} \tag{27}$$

.2.1 Gradient adiabatique d'une atmosphère non saturée

Le premier principe appliqué à l'unité de masse d'air humide s'écrit :

$$\mathrm{d}H = \delta Q + V\mathrm{d}P$$

avec

$$\mathrm{d}H = (m_d c_{pd} + m_v c_{pv})\mathrm{d}T = m_d c_{pd}(1 + r\frac{c_{pv}}{c_{pd}})\mathrm{d}T$$

où c_{pd} et c_{pv} sont les chaleurs massiques de l'air sec et de la vapeur d'eau ($c_{pd} = 1004$ J/kg et $c_{pv} = 1850$ J/kg). Il vient :

$$m_d(1 + r\frac{c_{pv}}{c_{pd}})\mathrm{d}T = m_d(R_d + rR_v)T\frac{\mathrm{d}P}{P} \tag{28}$$

soit

$$\frac{\mathrm{d}T}{T} = \frac{R_d(1 + r/\epsilon)}{c_{pd}(1 + r\frac{c_{pv}}{c_{pd}})}\frac{\mathrm{d}P}{P} = \frac{R'}{c'_p}\frac{\mathrm{d}P}{P} = \kappa'\frac{\mathrm{d}P}{P} \tag{29}$$

avec $c'_p = c_{pd}(1 + 1,85r)$ et $R' = R_d(1 + 1/\epsilon)$. Finalement :

$$\theta = T\left(\frac{P_0}{P}\right)^{\kappa'} \tag{30}$$

Le gradient adiabatique de l'air humide se déduit de l'équation (29). En remarquant que $\mathrm{d}P/P = -g\mathrm{d}z/R_dT_v$, il vient :

$$\Gamma_d = -\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}z}\right)_{q=0} = \frac{g}{c_{pd}}\left(\frac{1 + r}{1 + \frac{c_{pv}}{c_{pd}}}\right) \tag{31}$$

Notations d'Einstein

Soit p, q, r des indices entiers prenant les valeurs 1,2 ou 3. Les indices indiquent les coordonnées cartésiennes x, y, et z. Une composante de la vitesse est noté U_p, une coordonnée cartésienne, X_p. Un vecteur unitaire est noté e_p. Avec ces conventions :

$$X_1 \equiv x, \quad U_1 \equiv u, \quad e_1 \equiv \vec{i}$$
$$X_2 \equiv y, \quad U_1 \equiv v, \quad e_2 \equiv \vec{j}$$
$$X_3 \equiv z, \quad U_1 \equiv w, \quad e_3 \equiv \vec{k}$$

Une variable avec	aucun indice	est un scalaire
" "	un indice	est un vecteur
" "	deux indices	est un tenseur

La règle selon laquelle une variable possédant aucun indice est un scalaire souffre deux exceptions.

(i) Le delta de Kronecker δ_{pq} est un scalaire même s'il a deux indices

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$$

(ii) Le tenseur unité ϵ_{pqr} est un scalaire même s'il a trois indices

$$\epsilon_{pqr} = \begin{cases} +1 & \text{si } pqr = 123, 231, 312 \\ -1 & \text{si } pqr = 132, 213, 321 \\ 0 & \text{si au moins deux indices sont égaux} \end{cases}$$

Les règles suivantes sont appliquées :

Règle 1 : Si un indice apparaît deux fois dans un même terme, ce terme est sommé 3 fois, l'indice doublé prenant successivement les valeurs 1, 2 et 3.

Règle 2 : Si un indice apparaît libre (non sommé) il doit apparaître dans tous les termes de l'équation. De plus, cette équation correspond à 3 équations, pour les trois valeurs, 1, 2, ou 3, de l'indice.

Exemple 0.1 :

$$U_p \frac{\partial U_q}{\partial X_p} \quad \equiv \quad u\frac{\partial U_q}{\partial x} + v\frac{\partial U_q}{\partial y} + w\frac{\partial U_q}{\partial z} \quad \equiv \quad \begin{cases} u\dfrac{\partial u}{\partial x} + v\dfrac{\partial u}{\partial y} + w\dfrac{\partial u}{\partial z} \\ u\dfrac{\partial v}{\partial x} + v\dfrac{\partial v}{\partial y} + w\dfrac{\partial v}{\partial z} \\ u\dfrac{\partial w}{\partial x} + v\dfrac{\partial w}{\partial y} + w\dfrac{\partial w}{\partial z} \end{cases}$$

Exemple 0.2 :

$$U_p = X_p + \delta_{pq} Y_q \quad \equiv \quad \begin{cases} U_1 = X_1 + \delta_{1q} Y_q \\ U_2 = X_2 + \delta_{2q} Y_q \\ U_3 = X_3 + \delta_{3q} Y_q \end{cases} \quad \equiv \quad \begin{cases} U_1 = X_1 + Y_1 \\ U_2 = X_2 + Y_2 \\ U_3 = X_3 + Y_3 \end{cases}$$

Bibliographie

Mauritsen T., G. Svenson, S. Zilitinkevitvh, I. Esau, L. Enger, et B. Grisogono. A TOTAL TURBULENT ENERGY CLOSURE MODEL FOR NEUTRALLY AND STABLY STRATIFIED ATMOSPHERIC BOUNDARY LAYERS. J. Atmos. Sci., 64 :4113–4126, 2007.

Stull R.B. An Introduction to Boundary Layer Meteorology. Kluver Academic Publisher, 1988.

Wallace J.M. et P.V. Hobbs. Atmospheric Science, an Introductory Survey. Academic Press, Elsevier, 2006.

Index

A

autocorrélation 20

C

corrélation
    coefficient de 19
covariance 19, 21

E

echelles 13

F

flux 20
    cinématique 20
    tourbillonnaire 21

M

moyennage
    règle 17

R

Reynolds
    décomposition 17
    moyenne de 18
    nombre de 33
Richardson de flux
    nombre de 40, 41
rugosité
    longueur de 66

T

Taylor
    hypothèse de 13

V

variance 19