

Chapitre 3

Transport des espèces chimiques associé aux circulations frontales des moyennes latitudes

3.1 Préambule

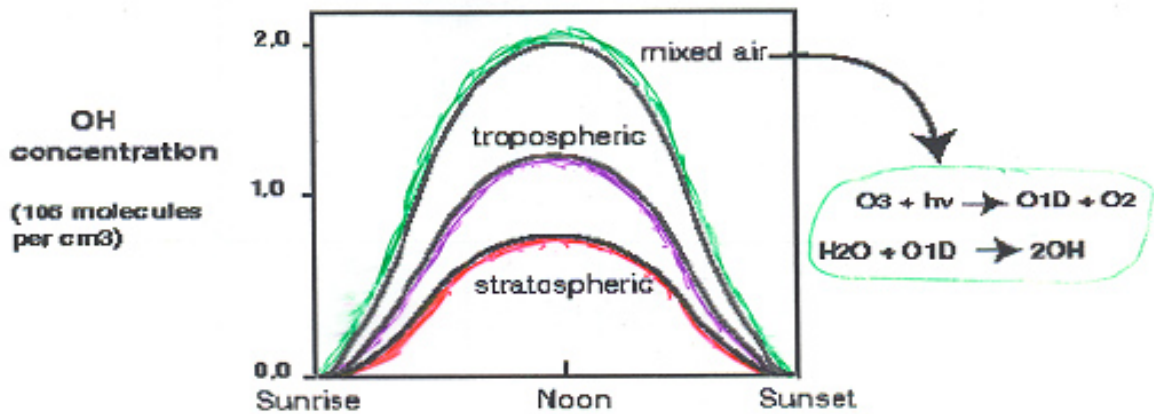
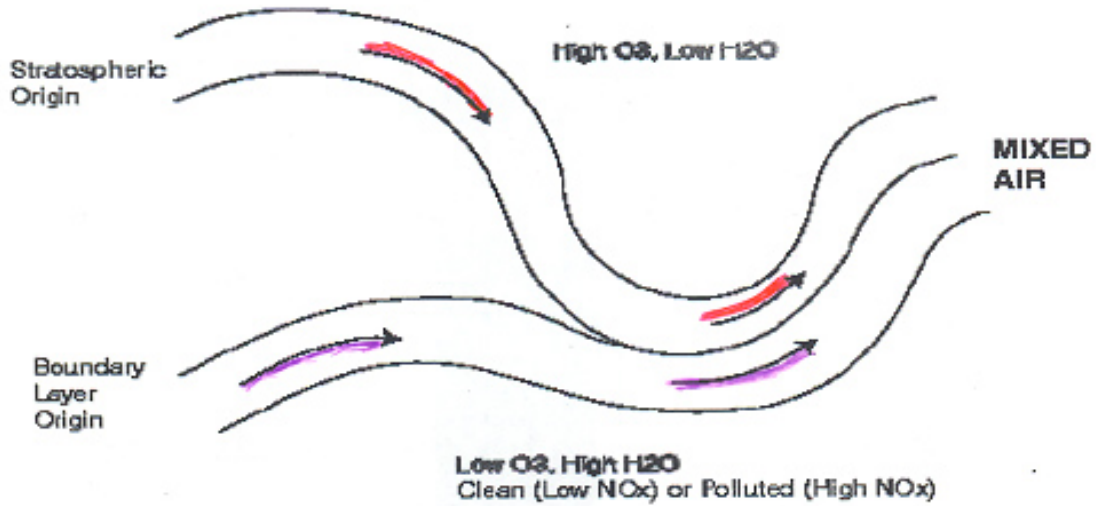
La compréhension des mécanismes permettant le développement des perturbations météorologiques n'est pas seulement importante pour étudier les phénomènes météorologiques (précipitation, vent, température) mais aussi pour comprendre la composition chimique de la troposphère. Le but de ce chapitre ne sera pas d'étudier les conditions de développement de ces systèmes météorologiques (processus frontogénétiques) mais plutôt de s'intéresser à ce qui détermine les phénomènes physiques intervenant dans la réactivité chimique de l'atmosphère. En particuliers rappelons ce que nous entendons par perturbations météorologiques dans ce cours :

- la juxtaposition de masses d'air thermodynamiquement différentes qui vont être mises au contact l'une de l'autre (formation du front)
- une réponse de l'atmosphère à la formation de ce front qui se traduit par une modification des champs de vent notamment le développement d'une circulation dans le plan vertical.

L'échelle correspondant à ces phénomènes ne sera plus comme au chapitre précédent de l'ordre de 1 km sur la verticale et <10 km sur l'horizontale, c'est à dire une distance où l'atmosphère est considérée en première approximation comme quasi-homogène. L'échelle verticale couvrira maintenant l'ensemble de la troposphère (0-10 km) et l'échelle horizontale sera supérieure à 1000 km (c'est à dire les distances caractéristiques de l'onde de Rossby). Dans ce cadre les conditions de validation de l'approximation quasi-géostrophique vont s'appliquer : (i) échelles horizontales suffisamment grandes devant l'épaisseur de la troposphère et pour avoir un nombre de Rossby inférieur à 1 (ii) échelle temporelle supérieurs à la période de Coriolis (12 h)

FIGURE 3.1 –

Impact of Mixing on Chemical Composition of the Upper Troposphere



3.2 Position des problèmes

Quels sont les questions relatives à la dynamique des atmosphérique qui vont être pertinentes pour la chimie de l'atmosphère? On peut en citer 3 :

- Comme la zone frontale sépare deux masses d'air d'origine et donc de composition chimique différente, les processus de mélange à leur interface vont modifier leur com-

position chimique et donc leur réactivité chimique (formation de polluants secondaires O₃, aérosols ...). Ce mélange est intrinsèquement lié aux processus de déformation spatiale à petite échelle ($\Delta z < 1$ km, $\Delta x < 100$ km) de cette zone frontale. L'étude de cette évolution de la géométrie de la zone frontale est ainsi la première des questions à résoudre

- Le développement d'un système dépressionnaire (ou anticyclonique) s'accompagne de circulations verticales qui vont notamment redistribuer en altitude les composés chimiques émis à la surface. La compréhension de la localisation de ces circulations et de leur évolution est ainsi la deuxième question qui sera abordée.
- L'observation de la composition chimique de l'atmosphère permet en retour de mieux comprendre les processus dynamiques à l'oeuvre dans l'atmosphère. La question est de déterminer les associations les plus pertinentes de mesures chimiques (ozone/CO, CO/CO₂, ...) pour atteindre cet objectif.

Pour illustrer l'intérêt d'étudier la structure géométrique d'une zone frontale, citons deux exemples :

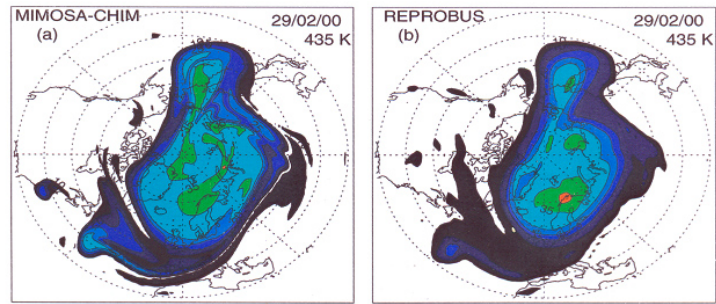
- le mélange de deux masses d'air d'origine troposphérique (faible [O₃] et fort [H₂O]) et stratosphérique (fort [O₃], faible [H₂O]) sur la production du radical hydroxyle OH,
- la modélisation de la structure fine de la bordure du vortex polaire pour calculer la destruction de l'ozone stratosphérique au pôle.

Le premier exemple montre que la production de OH ($P(\text{OH}) \approx [\text{O}_3][\text{H}_2\text{O}]$) est très sensible à l'intensité des phénomènes de mélange qui peut exister lorsque les processus de déformation de l'écoulement amènent 2 masses d'air d'origine différente à se mélanger (Fig. 3.1).

Le deuxième exemple (Fig. 3.2) s'appuie sur la comparaison entre la destruction chimique de l'ozone pour un modèle à très haute résolution spatiale (<100 km) et celle fournie par un modèle à faible résolution (>300 km). La modélisation de la destruction d'ozone peut être sous-estimée à l'intérieur du vortex polaire si on ne tient pas compte des structures de petite échelle. La propagation vers les moyennes latitudes de la perte d'ozone dans le vortex sera moins intense pour un modèle à faible résolution.

Pour illustrer le rôle des circulations verticales, on peut étudier (Fig. 3.3) la distribution de l'ozone troposphérique en Europe dans un plan vertical restitué par une observation continue dans le temps du profil vertical (mesures lidar). Sous la tropopause (zone de fort gradient vertical d'ozone), des zones d'enrichissement en ozone suggèrent soit des intrusions d'ozone stratosphérique soit du transport depuis l'Amérique du Nord d'ozone produit photochimiquement dans la troposphère. La distinction des 2 sources nécessite des calculs de trajectoires des masses d'air (voir section du cours sur ce sujet). Ces observations suggèrent un double rôle des circulations verticales : un couplage entre stratosphère et troposphère et du transport interrégional des polluants. L'effet sur l'ozone est du même ordre de grandeur pour les 2 processus.

FIGURE 3.2 –



PERTE CHIMIQUE, %

Janv., Fev., Mars

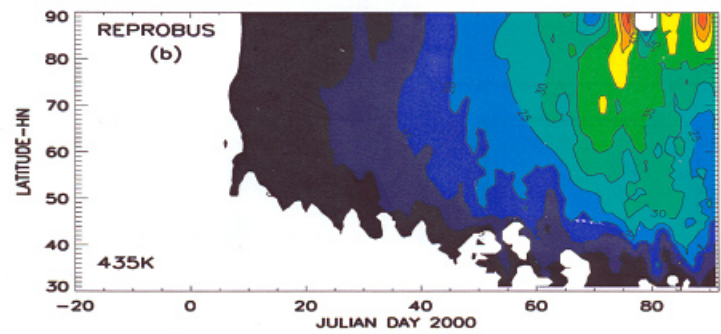
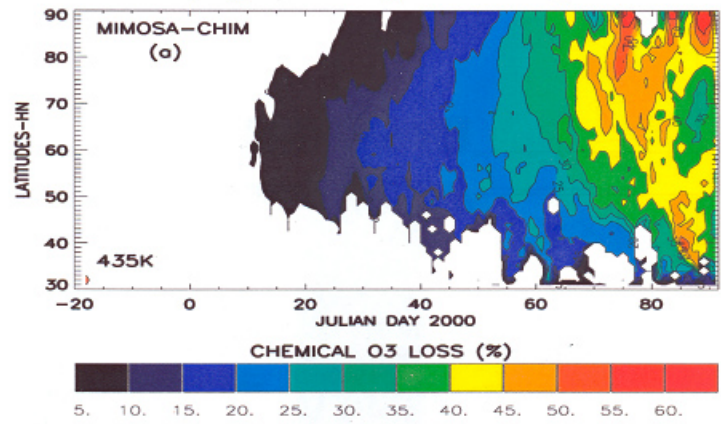
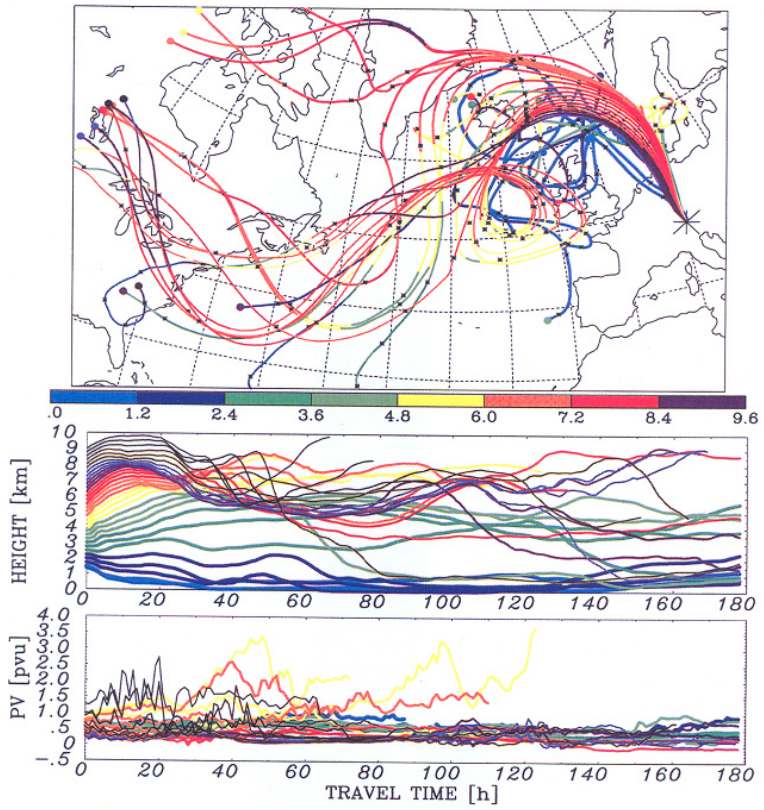
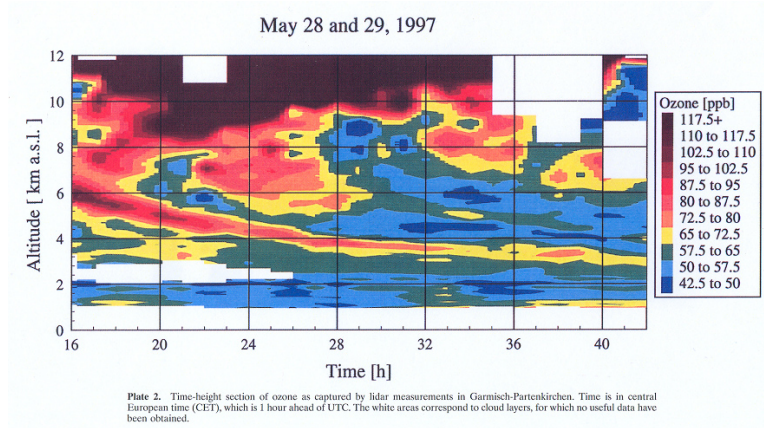


FIGURE 3.3 –



3.3 Méthode d'analyse du développement des zones frontales des moyennes latitudes

3.3.1 Apport de l'analyse des champs de vent et température

La structure et l'évolution des perturbations météorologiques ont été étudiées dès 1920 par l'école Norvégienne (Bjerkens). Même si une nouvelle approche est maintenant largement basée sur les concepts de la météorologie dynamique utilisant les équations de la dynamique des fluides dans le cadre quasi-géostrophique, le modèle simplifié basé sur l'examen de l'évolution des champs de vent et température en surface et en altitude (par exemple à 500 hPa) reste pertinent. Dans cette approche la perturbation est caractérisée par (Fig. 3.4) :

- un front chaud incliné dans un plan vertical et surplombant un coin d'air froid peu épais. Ce front est aussi caractérisé par de vastes zones nuageuses souvent précipitantes.
- un front froid plus abrupt où l'air peut être transporté localement rapidement en altitude avec formation de nuages d'averse
- un secteur chaud entre les deux fronts. Son développement va largement conditionner celui de la perturbation.

Les conditions initiales permettant le développement de la perturbation sont illustrées sur la figure 3.5a et montrent le rôle de la formation de gradient horizontaux de température dans la basse atmosphère à savoir :

- dans les zones de déformation des écoulements par des régions montagneuses
- aux interfaces continent-océan

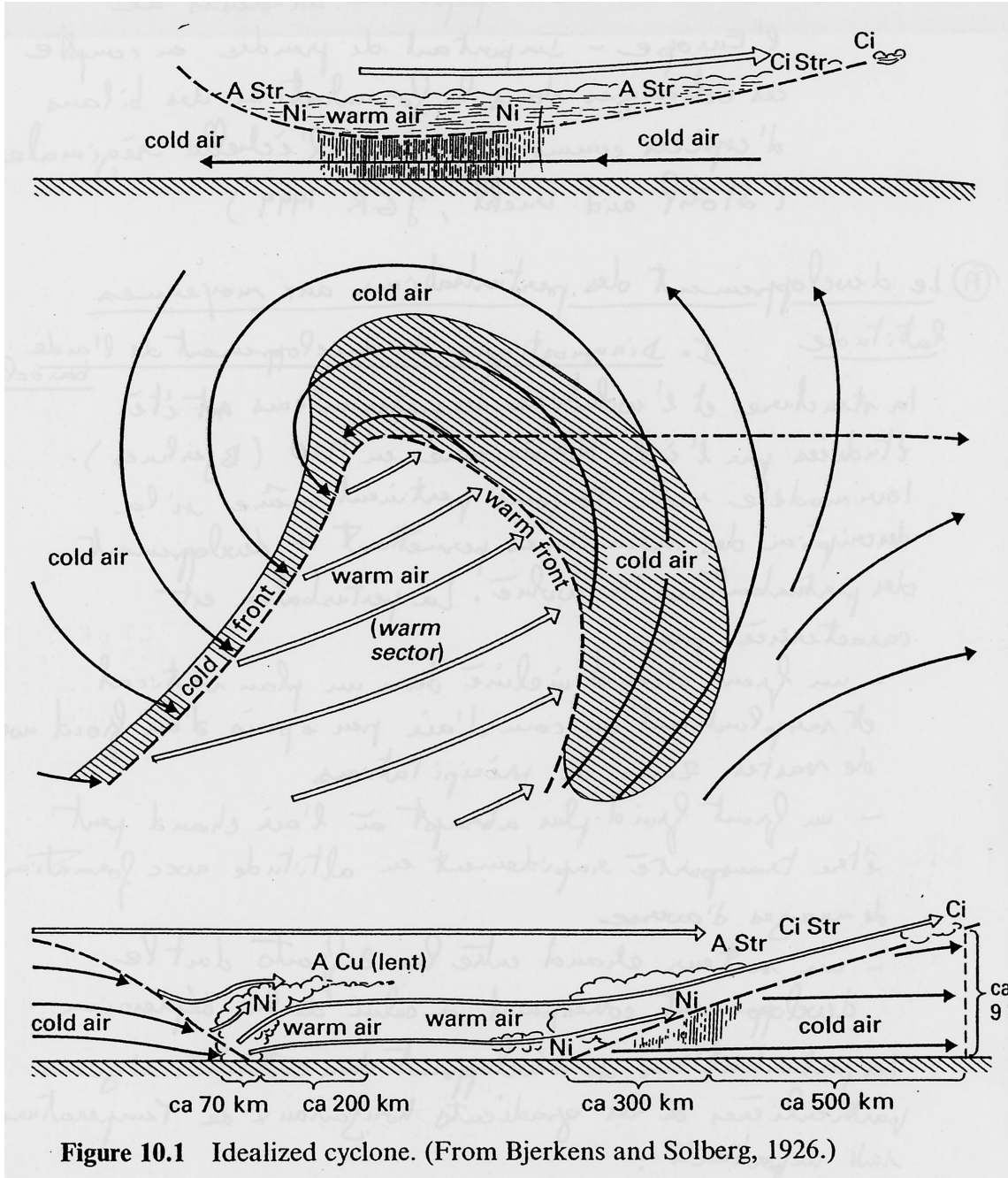
Le développement ultérieur de la perturbation est caractérisé par la progression du secteur chaud visible sur le champ de température T en surface et le creusement du champ de pression qui est généralement représenté par l'évolution du géopotential ϕ sur un niveau de pression p constant (par exemple 500 hPa). Dans un champ de vitesse \vec{V} , la réponse atmosphérique à un creusement du géopotential est toujours associée à une courbure de l'écoulement quantifiée par le tourbillon relatif $\vec{\xi} = \vec{\nabla} \wedge \vec{V}$. On rappelle aussi les relations reliant ϕ à la température (équilibre hydrostatique) et à la composante verticale ξ_g de $\vec{\xi}$ en ne prenant en compte que la composante géostrophique du vent \vec{V}_g (équilibre géostrophique) :

$$\begin{aligned} \vec{V}_g &= \frac{1}{f_0} \vec{\nabla} \phi \wedge \vec{k} \\ \xi_g &= \frac{\partial v_g}{\partial x} - \frac{\partial u_g}{\partial y} = \frac{\nabla^2 \phi}{f_0} \\ \frac{\partial \phi}{\partial \ln P} &= -RT \end{aligned}$$

avec $f = f_0 + \beta y \approx f_0$ (f augmente avec la latitude). Ces relations expliquent pourquoi l'évolution du géopotential est clairement bien décrite par un suivi de la température de la basse atmosphère et du tourbillon en altitude à 500 hPa. Cette évolution de l'onde barocline est ainsi représentée sur la figure 3.5.

En parallèle au creusement du champ de pression dans la moyenne troposphère, l'analyse du géopotential vers 200 hPa (Fig. 3.6) montre que la tropopause subit une déformation avec une subsidence centrée sur l'anomalie de tourbillon à 500 hPa. Cette déformation est

FIGURE 3.4 -



par ailleurs associée à des mouvements verticaux qui sont eux même une manifestation de l'évolution de l'onde barocline. A la différence de la condition limite en surface qui par frottement s'oppose à la propagation de la perturbation, la limite supérieure au volume

étudié, c.a.d. la tropopause, accompagne l'évolution de l'onde barocline.

FIGURE 3.5 –

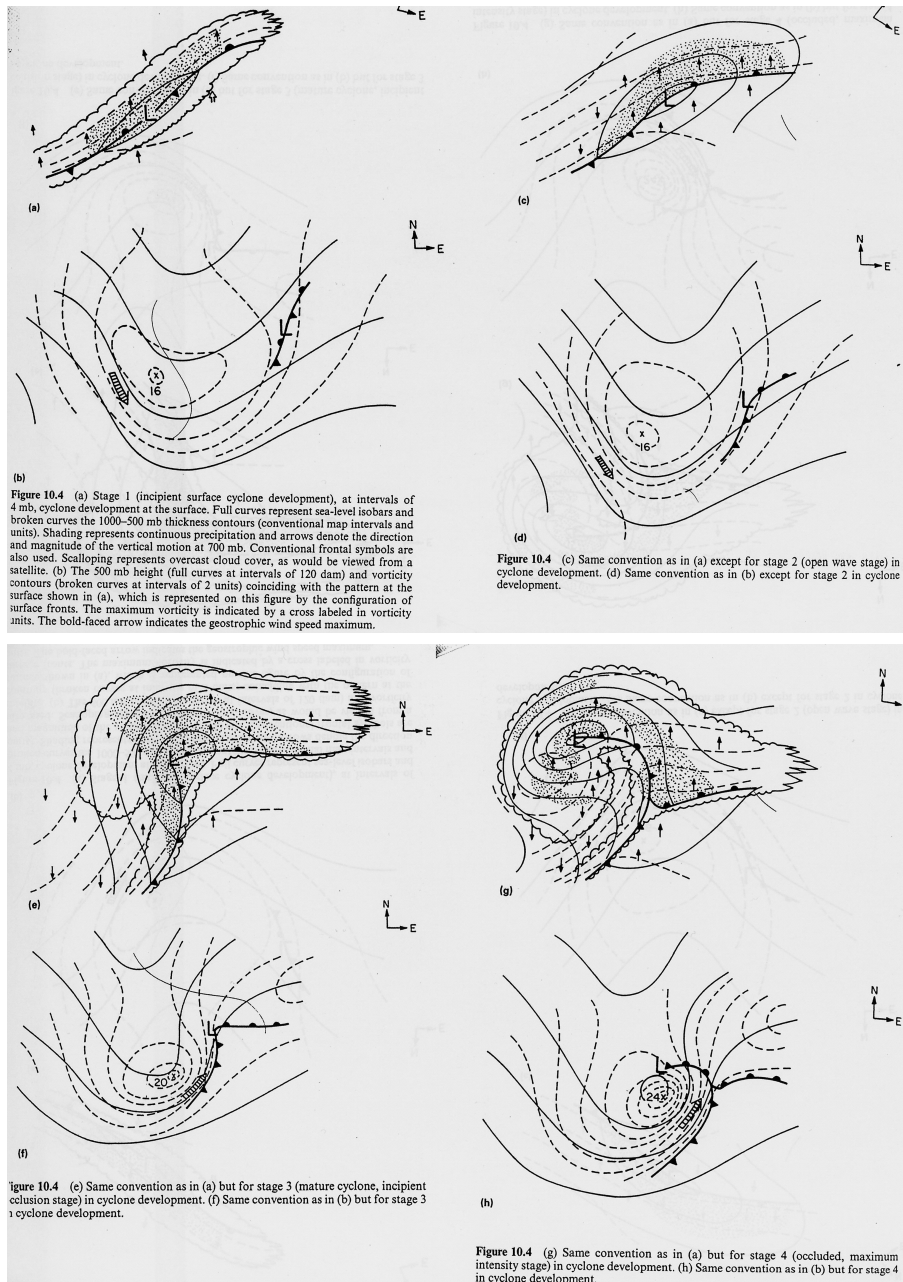
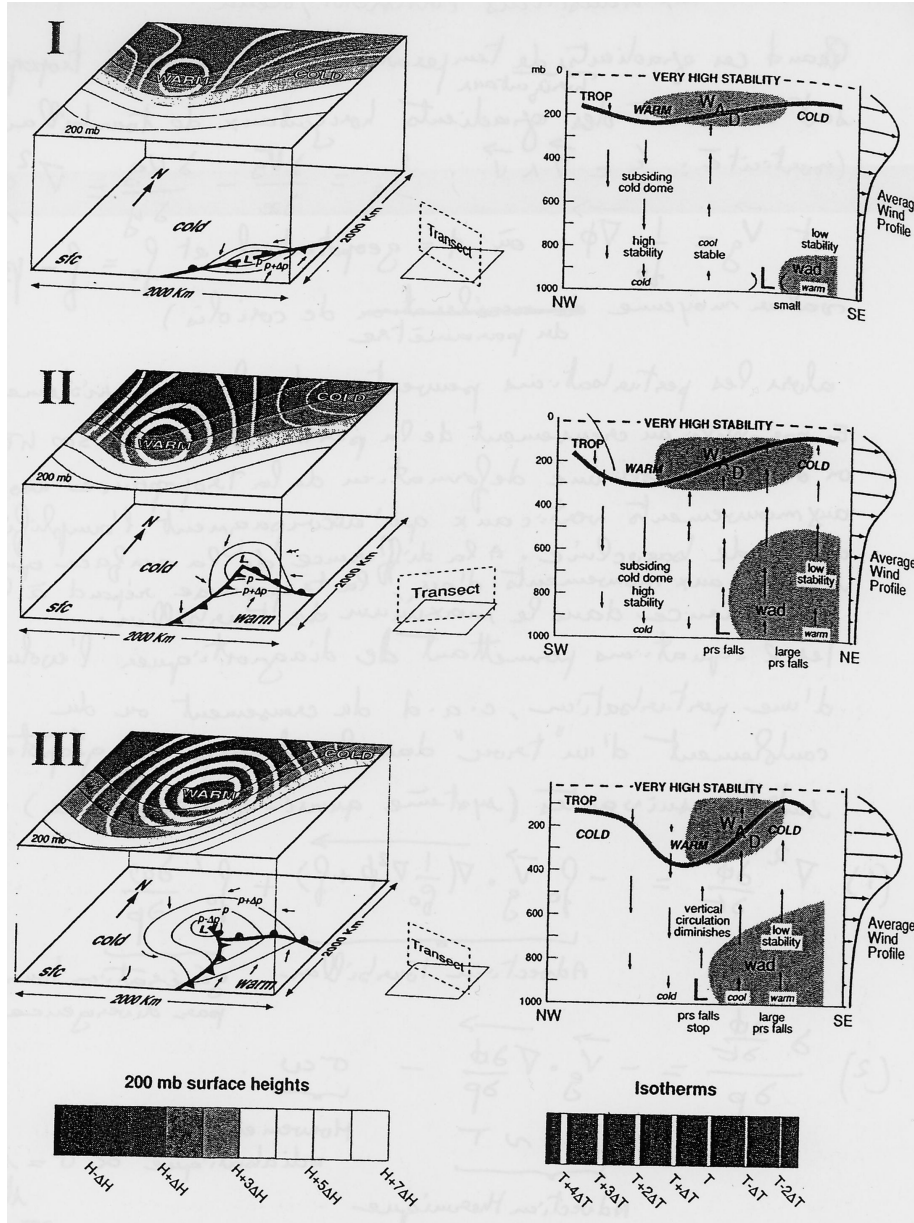


FIGURE 3.6 –



3.3.2 Equation d'évolution du géopotiel

Pour comprendre plus précisément l'intérêt de s'appuyer sur les cartes de la figure 3.5, nous pouvons examiner les 2 équations de base tirées des équations de la dynamique dans le cadre quasi-géostrophique : (i) l'équation dérivée de la conservation du moment en utilisant la relation tourbillon-géopotiel traduisant l'équilibre géostrophique (ii) l'équation dérivée de la conservation de l'énergie en utilisant la relation température/géopotiel traduisant

l'équilibre hydrostatique. Ces 2 équations s'écrivent :

$$\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} = -f_0 \vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\nabla^2 \phi}{f_0} + f \right) + f_0^2 \frac{\partial \omega}{\partial p} \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial p} \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) - \sigma \omega \quad (3.2)$$

avec ω la vitesse verticale en coordonnées pression, et $\sigma = \frac{RT}{p\theta} \frac{\partial \theta}{\partial p}$ le paramètre de stabilité statique. Dans l'équation 3.1 la tendance du géopotential est reliée à l'advection de tourbillon et à la génération de tourbillon par divergence. Dans l'équation 3.2 la tendance du géopotential est reliée à l'advection thermique et à l'intensité des déplacements verticaux adiabatiques. Pour étudier la tendance du géopotential on élimine la vitesse verticale ω pour obtenir l'équation 3.3 qui relie l'évolution temporelle à la simple connaissance des dérivées spatiales du champ du géopotential au temps t.

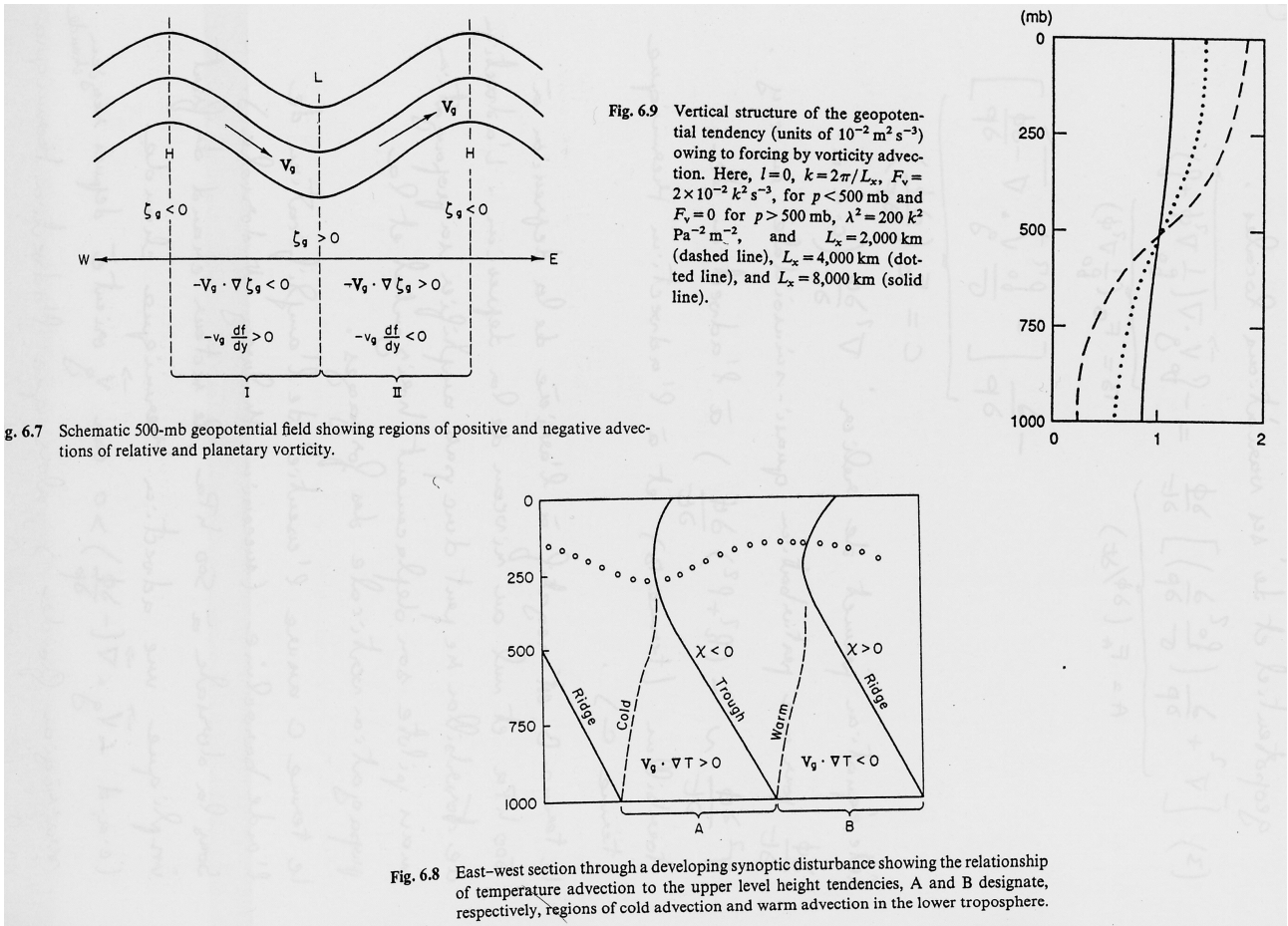
$$\left[\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] \frac{\partial \phi}{\partial t} = -f_0 \vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\nabla^2 \phi}{f_0} + f \right) + \frac{\partial}{\partial p} \left[\frac{f_0^2}{\sigma} \vec{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \quad (3.3)$$

On fait souvent l'hypothèse d'une variation sinusoidale du geopotential en x (longitude) et en y (latitude) avec des longueurs d'onde k et l, ce qui permet de ré-écrire que le membre de gauche de l'équation 3.3 varie comme $-\frac{\partial \phi}{\partial t}$ puisque $\nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial t} \approx -(k^2 + l^2) \frac{\partial \phi}{\partial t}$. La dérivée seconde en p peut être négligée en 1ere approximation en supposant une variation lineaire de $\frac{\partial \phi}{\partial t}$ avec l'altitude. Le membre de droite comprend 2 termes : l'advection de tourbillon (terme B) et l'advection thermique (terme C). La figure 3.7 illustre les variations en longitude et en altitude du signe de ces termes en se rappelant que le vent géostrophique est tangent au lignes de courant représentées par les isohypses.

Le terme B est négatif à l'arrière de la dépression à 500 hPa mais est nul sur l'axe de la dépression. Ceci correspond donc à un déplacement horizontal sans amplification de l'anomalie du géopotential. L'advection de tourbillon joue aussi un rôle important sur la propagation verticale du la perturbation subit par le geopotential. Par ailleurs la figure 3.7 montre que le découplage vertical entre l'advection à 500 hPa et le reste de la troposphère (surface ou tropopause) sera ainsi plus important pour les perturbations de faibles dimensions (< 2000 km) que pour les grandes longueurs d'onde. L'advection de tourbillon ne peut donc pas amplifier à elle seule la perturbation mais va assurer son déplacement et son interaction avec le front de surface.

Le terme C assure lui l'amplification de l'onde barocline puisque la partie inférieure de la figure 3.7 montre qu'il est positif sur la dorsale à 500 hPa (position du maximum de l'onde) et négatif sur le thalweg. Ceci est du à (i) une advection thermique négative sous la dorsale en accord avec la progression du secteur chaud vers le nord (ii) à l'augmentation de l'advection thermique avec la pression car les gradients horizontaux de température sont plus marqués au voisinage de la surface. On valide ainsi la vision classique du développement des perturbations de moyennes latitudes qui est largement déterminé par l'évolution du secteur chaud même si la propagation verticale du caractère cyclonique de l'écoulement reste assuré par l'advection de tourbillon en altitude.

FIGURE 3.7 –



3.4 Méthode d'analyse des circulations verticales

La détermination des déplacements verticaux est fondamentale pour étudier le transport des polluants dans l'atmosphère sur de longues distances mais aussi pour déterminer le degré d'impact d'une source de surface sur l'échelle régionale ou globale. Nous avons aussi vu que ces mouvements verticaux vont contribuer à l'évolution des structures frontales et donc du degré de mélange possible entre des masses d'air de composition chimique différente. Nous allons nous intéresser ici à différentes méthodes que l'on peut mettre en oeuvre pour diagnostiquer le sens et la répartition spatiale de ces circulations verticales aux latitudes moyennes.

3.4.1 Approche basée sur l'équation de conservation de la masse : méthode cinématique

La méthode qui apparaît la plus simple pour déterminer la structure spatiale du champ de vent vertical est d'utiliser l'équation de conservation de la masse et $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0$ et de l'intégrer sur la coordonnée verticale (ici p) en utilisant le fait que $\vec{V} = \vec{V}_g + \vec{V}_{ag}$ et que $div_H \vec{V}_g = 0$. on obtient alors :

$$\omega(p) = \omega(p_s) + (p_s - p)div_H \vec{V}_{ag} \quad (3.4)$$

Comme les écarts au vent géostrophique sont faibles, l'erreur sur le calcul de la divergence de ce champ peut être très grande (> 100%). Cette méthode n'est donc envisageable que si le champ de vent est suffisamment bien résolu pour avoir des erreurs < 10% sur le vent agéostrophique. Ceci est possible avec les nouvelles analyses météorologiques ayant des résolutions horizontales supérieures à 100 km. Cependant les modèles de climat et les modèles chimiques travaillent souvent à des résolutions moins élevées.

3.4.2 Equation de la vitesse verticale en quasi-géostrophique

Une autre approche consiste à revenir aux équations 3.1 et 3.2 pour exprimer la vitesse verticale en fonction des différents forçages discutés dans la section précédente : advection de tourbillon et advection thermique. En effet ces 2 équations peuvent être à nouveau combinées mais en éliminant cette fois la variable $\frac{\partial \phi}{\partial t}$. Pour cela nous utilisons le laplacien de l'équation 3.2 et la dérivée selon p de l'équation 3.1. On obtient l'équation de la vitesse verticale ω qui ne dépend que des dérivées spatiales de ϕ à un instant donné :

$$\left[\nabla^2 + \frac{f_0^2}{\sigma} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \right] \omega = \frac{f_0}{\sigma} \frac{\partial}{\partial p} \left[\vec{V}_g \cdot \nabla \left(\frac{\nabla^2 \phi}{f_0} + f \right) \right] + \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \left[\vec{V}_g \cdot \nabla \left(-\frac{\partial \phi}{\partial p} \right) \right] \quad (3.5)$$

Comme précédemment le membre de gauche est proportionnel à $-\omega$. Le 1er terme du membre de droite de l'équation 3.5 est la variation en altitude de l'advection de tourbillon et le 2eme terme est proportionnel à $-\vec{V}_g \cdot \nabla T$ en supposant toujours une variation de type sinusoïdale en x et y pour l'onde thermique. On remarquera aussi que l'advection de tourbillon diminue toujours avec p puisque le tourbillon diminue quand on se rapproche de la surface. La dérivée selon p change donc aussi le signe de l'advection de tourbillon. Si on étudie le rôle de ces 2 termes sur signe de ω (Fig. 3.8), on obtient pour l'advection de tourbillon :

- $\omega > 0$ à l'arrière de la dépression d'altitude puisqu'elle a un signe opposé au terme B de l'équation 3.3
- $\omega < 0$ à l'avant de la dépression d'altitude

On peut noter que les déplacements verticaux associés à ce terme compense la perturbation de température induite par l'advection thermique de basse couche. En effet la subsidence à l'arrière de la dépression sur le flanc anticyclonique implique un réchauffement par compression alors que l'ascendance à l'avant de la dépression implique un refroidissement par détente adiabatique.

Pour le rôle de l'advection thermique on peut de la même façon étudier le signe de ω et on obtient :

- $\omega > 0$ dans la zone du maximum de tourbillon à 500 hPa c.a.d. derrière le front froid de surface
- $\omega < 0$ dans la zone du minimum de tourbillon à 500 hPa c.a.d. à l'avant du front chaud de surface

A nouveau on remarque que les déplacements verticaux associés à ce terme compense l'advection du tourbillon dans la dépression d'altitude. En effet la subsidence dans le maximum de tourbillon correspond à une diminution de ϕ au centre de la dépression d'altitude et donc une augmentation de $(f + \xi)$ puisque $\xi \propto \nabla^2 \phi \propto -\phi$. Cette augmentation vient bien compenser l'advection négative de tourbillon à l'arrière de la dépression. De même l'ascendance dans le minimum de tourbillon induit une augmentation de ϕ qui implique une diminution de $(f + \xi)$.

FIGURE 3.8 -

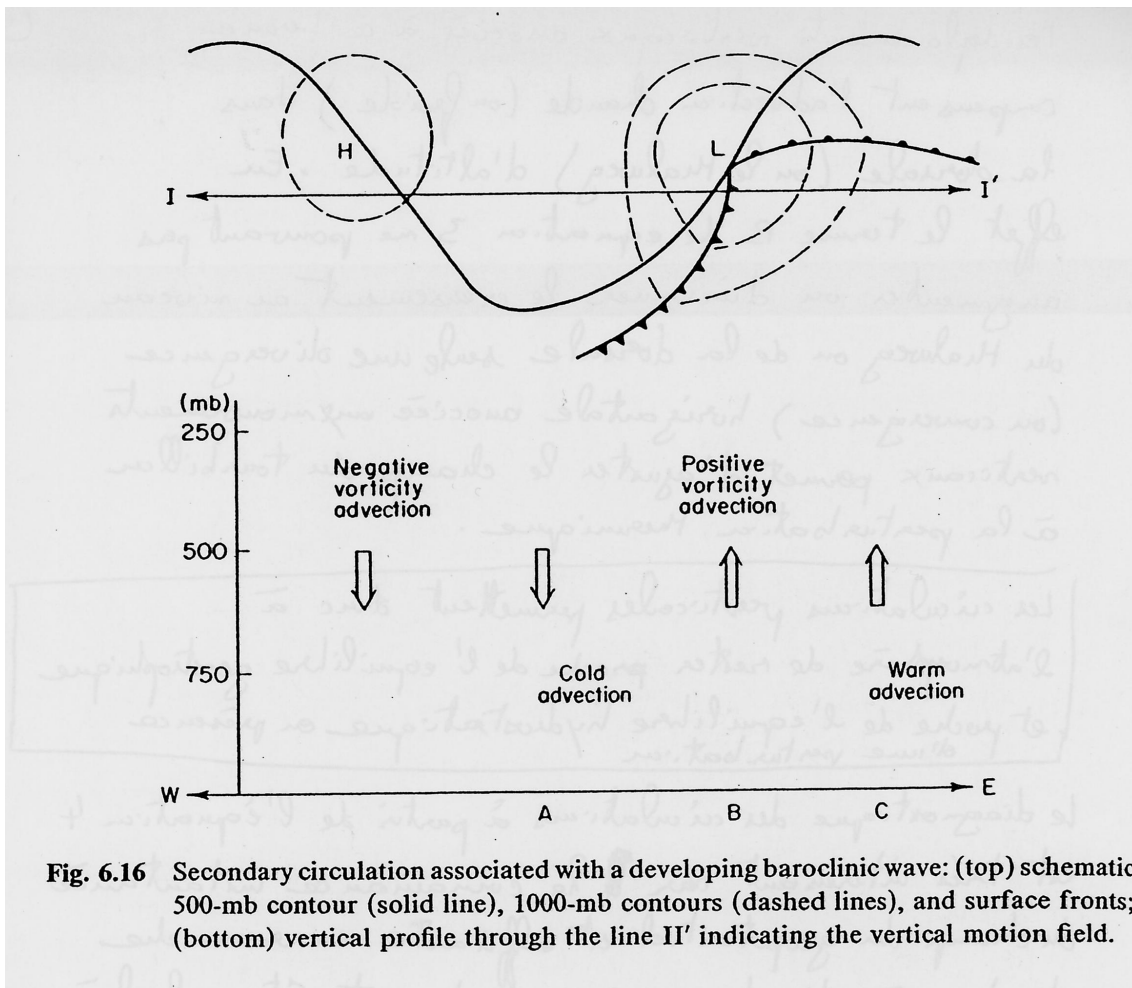


Fig. 6.16 Secondary circulation associated with a developing baroclinic wave: (top) schematic 500-mb contour (solid line), 1000-mb contours (dashed lines), and surface fronts; (bottom) vertical profile through the line II' indicating the vertical motion field.

Les circulations verticales permettent donc à l'atmosphère de rester proche de l'équilibre géostrophique et de l'équilibre hydrostatique même lors d'une perturbation du champ du géopotentiel.

Le diagnostic de ces circulations à partir de l'équation 3.5 présente l'avantage de n'utiliser que la connaissance instantanée du champ de géopotentiel. ceci est très utile pour avoir une première idée de la localisation des zones d'ascendance et de subsidence. En ce qui concerne la précision du calcul du vent vertical, même si les champs du géopotentiel peuvent être déterminés avec une bonne précision, la nécessité d'utiliser le calcul de dérivées d'ordre supérieur limite quelque peu l'intérêt pratique de la méthode.

3.4.3 L'utilisation des coordonnées isentropes : la fonction de courant de Montgomery

Pour obtenir une équation n'utilisant pas la divergence du vecteur vent, il est courant de partir de l'équation de conservation de l'énergie en supposant les termes de chauffage diabatique faibles devant les autres mécanismes modifiant le champ de température (advection horizontale, détente adiabatique) et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{D\theta}{Dt} &= \left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_p + \vec{V}_H \cdot \nabla\theta + \omega \frac{\partial\theta}{\partial p} = 0 \\ \omega &= -\frac{1}{\frac{\partial\theta}{\partial p}} \left[\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_p + \vec{V}_H \cdot \nabla\theta \right]\end{aligned}$$

Pour éviter de faire intervenir le gradient vertical de température dans l'équation précédente nous remplaçons la coordonnée verticale p par la température potentielle θ . Nous devons alors utiliser les relations classiques exprimant les changements des dérivées partielles selon t ou selon x,y :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)_p &= -\frac{\partial\theta}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\theta \\ \left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)_p &= -\frac{\partial\theta}{\partial p} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_\theta\end{aligned}$$

En appelant \vec{V}_θ la projection du vent sur la surface isentrope de température θ et ω_θ le vent vertical lié à un déplacement sur cette surface, on obtient l'expression suivante pour la vitesse verticale :

$$\omega_\theta = \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\theta + \vec{V}_\theta \cdot \overrightarrow{\nabla_\theta p} \quad (3.6)$$

Par rapport à l'équation 3.4, le terme en $\vec{V}_\theta \cdot \overrightarrow{\nabla_\theta p}$ ne fait plus intervenir la divergence du vent mais seulement son module. Nous avons cependant besoin d'évaluer la variation

temporelle du champ de température ce qui est un facteur limitant avec des analyses météorologiques souvent fournies toutes les 6 heures.

L'existence de déplacements verticaux dans un tel formalisme implique nécessairement une inclinaison des isentropes par rapport à un plan horizontal, examinons si c'est bien le cas. L'angle d'inclinaison α d'une isentrope sur l'horizontal s'écrit :

$$\tan \alpha = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_\theta \propto - \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_\theta = \frac{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_p}{\frac{\partial \theta}{\partial p}} \quad (3.7)$$

Or $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)_p < 0$ si l'axe x est orienté sur un axe Sud-Nord, et pour une atmosphère pas trop instable (c.a.d. $\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0$ ou $|\frac{dT}{dz}| < \frac{g}{C_p} = 10 \text{ K/km}$), on obtient $\tan \alpha > 0$ ce qui veut dire que les isentropes s'inclinent généralement vers le haut quand on regarde les régions plus froides. Ceci est illustré par la figure 3.9a qui représente le champ de pression (tireté) sur une surface isentrope à 310 K située à 300 hPa sur le Canada et 900 hPa sur la Floride. De même la coupe verticale des isentropes entre 295 K et 385 K pour une dépression se développant sur les Rocheuses montrent la même chose à l'échelle régionale (Fig.3.9b).

Sur la figure 3.9a est également représenté les lignes de courant permettant de décrire l'écoulement sur une surface isentrope. Pour une surface isobare, nous savons que le géopotentiel représente la fonction de courant permettant de décrire la forme de l'écoulement. En utilisant les relations permettant de passer des dérivées en coordonnées pression aux dérivées en coordonnées θ et en définissant la fonction de Montgomery $\psi = (C_p T + gz)_\theta$, on montre que :

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x, y} \right)_\theta = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x, y} \right)_p \quad (3.8)$$

avec C_p est la capacité calorifique de l'air sec. On utilise pour cela le paramètre $\pi = \frac{C_p T}{\theta} = C_p (p/1000)^{R/C_p}$. L'équation 3.8 montre bien que la fonction de courant de Montgomery permet de déterminer le vent sur la surface isentrope, c.a.d. :

$$u_\theta = \frac{-1}{f_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)_\theta$$

$$v_\theta = \frac{1}{f_0} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)_\theta$$

Le 2eme terme de l'équation 3.6 est alors déterminé par la connaissance des 2 paramètres représentés sur la figure 3.9a : ψ et $(\vec{\nabla} p)_\theta$.

FIGURE 3.9 –

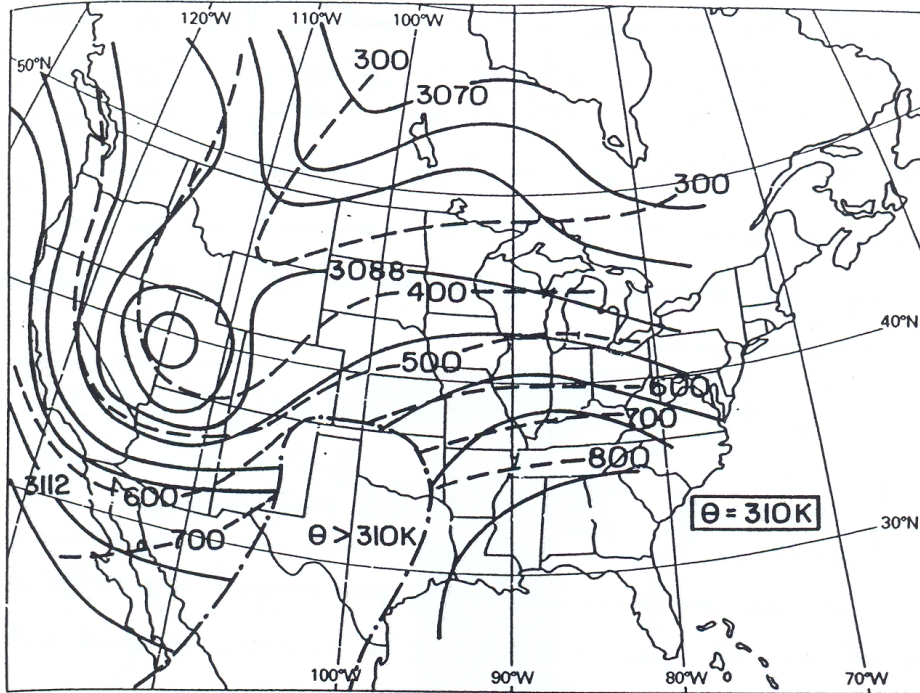


Figure 12.1 Isentropic flow on a 310 K surface at 0000 GMT 14 April 1972. Full curves are isopleths of the Montgomery streamfunction (M) at intervals of $60 \times 10^2 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$; broken curves are isobars in mb. Chain curve is intersection of isentropic surface with ground; in region labeled $\theta > 310 \text{ K}$, the isentropic surface is below the ground. (Based on figure by Danielsen, 1974.)

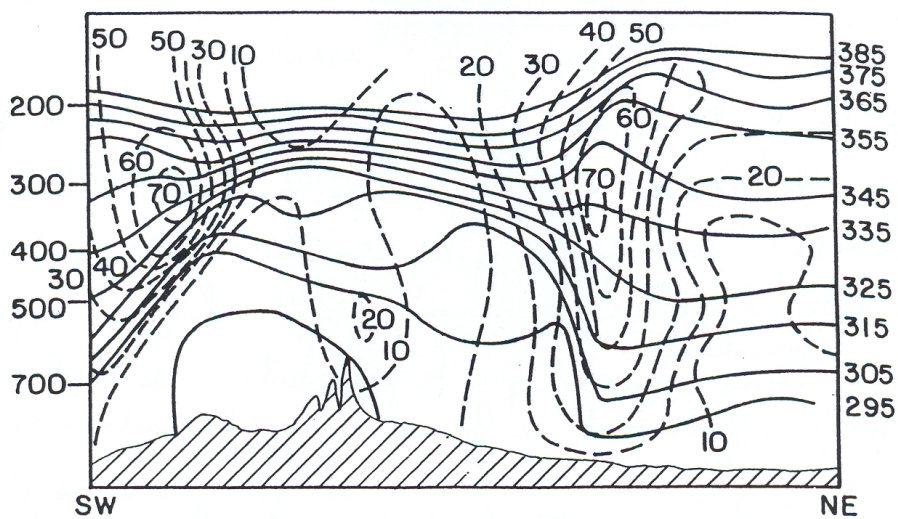


Figure 12.2 Vertical cross section approximately orthogonal to wind flow southwest–northeast at 0000 GMT 20 April 1973. Full curves are isentropes in K and broken curves are isotachs in m s^{-1} . (Based on figure by Danielsen, 1974.)

Hypothèse de l'onde gelée

Pour s'affranchir de la connaissance du premier terme de l'équation 3.6 qui nécessite un suivi de l'évolution avec une bonne résolution temporelle de l'ordre de 1 h, nous allons supposer qu'à l'échelle de 12 h l'onde se déplace sur l'isentrope avec une vitesse de translation \vec{C} sans modifier fortement sa forme. Ceci revient à admettre que l'onde est gelée sur un temps faible devant la durée de vie de la perturbation c.a.d. 3 à 4 jours. Avec cette hypothèse la dérivée Lagrangienne de p est nulle et on peut écrire que :

$$\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_\theta = -\vec{C}(\vec{\nabla}p)_\theta \quad (3.9)$$

$$\omega_\theta = V_{R\theta}(\vec{\nabla}p)_\theta \quad (3.10)$$

avec $V_{R\theta}$ la vitesse de déplacement des masses d'air relative au centre du système dépressionnaire qui peut être donc déterminée par la fonction de Montgomery relative $\psi_{R\theta}$.

L'étude des cartes de fonction de Montgomery relative $\psi_{R\theta}$ sur une surface isentrope permet donc de visualiser précisément les trajectoires des masses d'air par rapport au champ de pression et localiser la position des zones d'ascendance et de subsidence par rapport au centre dépressionnaire.

3.4.4 Trajectoires et lignes de courants

L'hypothèse de l'onde gelée a aussi une conséquence importante sur l'interprétation des fonctions de courant de Montgomery relatives. En effet ceci implique que l'écoulement est stationnaire puisque que $\psi_{R\theta}$ est indépendante de t . Les lignes de courant peuvent alors être identifiées avec les trajectoires réelles des masses d'air.

Nous rappelons que la trajectoire d'une masse d'air est définie comme la ligne composée par les points $M(x_T, y_T)$ correspondant à la solution à chaque pas de temps t de l'équation :

$$x_T(t) = \int u(t)dt$$

$$y_T(t) = \int v(t)dt$$

La fonction f correspondant à la trajectoire $y_T = f(x_T)$ n'a pas de raison de correspondre à la fonction de $y = \psi(x) = \int \frac{v(t)}{u(t)}dx$ sauf si l'écoulement est stationnaire (voir exemples dans Appendix A). La détermination de la fonction f pour une écoulement non stationnaire n'est pas simple et est effectuée de manière itérative. En linéarisant l'intégration temporelle sur un pas de temps suffisamment court ($< 10min$), on définit la position $x(t + \delta t) = x(t) + \delta t[u(t + \delta t) + u(t)]/2$. Comme nous avons 2 inconnues $x(t + \delta t)$ et $u(t + \delta t)$, on remplace $u(t + \delta t)$ par une valeur "first guess" en général $u(t)$ et on obtient alors :

$$x(t + \delta t) = x(t) + \delta t u(t, x(t)) \quad (3.11)$$

$$x'(t + \delta t) = x(t) + \delta t [u(t, x(t + \delta t)) + u(t, x(t))]/2 \quad (3.12)$$

Quand x, y, p et x', y', p' deviennent similaires, on arrête l'itération. On prend en général $x-x'$ ou $y-y' < 0.5$ km et $p-p' < 5-10$ hPa pour $p \in [200$ hPa, 1000 hPa].

3.4.5 Extension aux atmosphères humides

Pour une atmosphère humide, l'utilisation d'une coordonnée θ n'est plus vraiment pertinente car nous ne pouvons plus négliger les échanges de chaleur dus aux changements de phase de la vapeur d'eau. Heureusement aux moyennes latitudes une large fraction de la troposphère libre (entre 3 et 10 km) reste sans nuages thermodynamiquement très actifs, ce qui rend l'analyse isentropique toujours pertinente (voir chapitre 4)

L'autre approche est de travailler sur des surfaces de même température du thermomètre mouillée θ_w ou de même température potentielle équivalente θ_E plutôt que sur une surface isentrope. Les deux grandeurs sont couramment utilisées et permettent de définir la même surface. θ_E est toujours supérieure à θ puisque on ajoute à θ l'élévation de température correspondant à la chaleur dégagée en amenant une masse d'air à saturation de tout son contenu en vapeur d'eau (voir fig. 3.10). En revanche θ_w est inférieure à θ puisqu'il s'agit de la valeur de θ pour une pression de vapeur saturante $e_w(\theta_w, p_0) = e_w(\theta, p_{LCL})$. Sachant que e_w augmente avec la pression et avec la température, $e_w(\theta_w, p_0) < e_w(\theta, p_0)$ et donc $\theta_w < \theta$.

Par ailleurs les surfaces iso- θ_w seront toujours plus inclinées par rapport à la verticale puisque $\Delta\theta/\Delta z \approx 5^\circ\text{C}/\text{km}$ alors que $\Delta\theta_w/\Delta z \approx 0.6^\circ\text{C}/\text{km}$. Les mouvements verticaux dans la partie humide du front seront ainsi plus efficaces que les mouvements isentropiques de l'air sec.

FIGURE 3.10 –

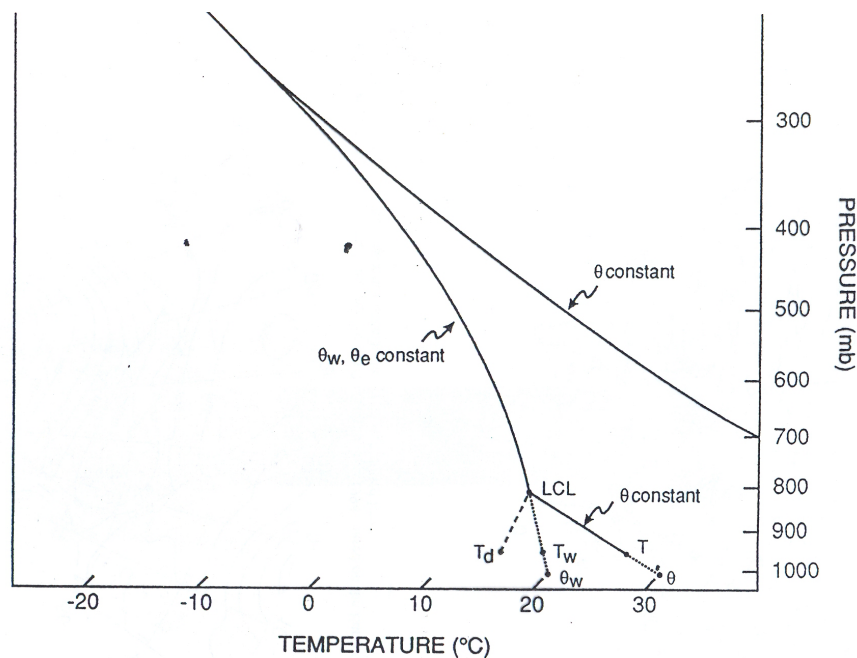


Figure 4.41 Illustration of how to compute the lifting condensation level (LCL), equivalent potential temperature (θ_e), and wet-bulb potential temperature (θ_w). Long dashed line is line of constant water vapor mixing ratio. Dewpoint (T_d), wet-bulb temperature (T_w), and temperature (T) also indicated.

3.5 Exemples d'analyses des mouvements relatifs aux perturbations

Dans cette partie nous allons maintenant donner des exemples d'utilisation des lignes de courant relatives au référentiel défini par le centre de la perturbation d'altitude. De tels lignes de courant ont permis à partir de l'examen d'un grand nombre de situations météorologiques de visualiser à un instant donné les types de circulations frontales permettant de déplacer verticalement de façon effective des masses d'air à travers la troposphère exactement comme on pourrait le faire avec des calculs de trajectoires.

3.5.1 Les différents types de circulations associés à une perturbation

La classification des circulations se comprend assez bien si on considère (i) l'inclinaison des surface isentropes par rapport à un plan horizontal (ii) l'intensité relative de la vitesse de déplacement \vec{C} de l'onde barocline par rapport à celle du vent géostrophique dans la zone frontale ("jet stream" ou courant jet). L'inclinaison implique que au creux du thalweg la masse d'air est à basse altitude ($p > 700$ hPa) et au maximum de la dorsale elle est à haute altitude ($p < 350$ hPa). Or $\|\vec{C}\| \approx 20-30 \text{ ms}^{-1}$ c'est à dire plus faible que le courant jet à 300 hPa mais plus forte que le vent à 700 hPa. Ceci va permettre de définir 4 types de circulations frontales :

- la branche AA à l'avant de la perturbation sur la partie haute de la figure 3.11 possède une courbure anticyclonique car les masses d'air à basse altitude sont moins rapides que le déplacement d'ensemble du système. L'air externe à la dépression peut alors être incorporé dans le système frontal. On l'appellera le "Warm Conveyor Belt" (WCB)
- la branche DD à l'arrière de la perturbation sur la figure 3.11 possède cette fois une courbure cyclonique car le ralentissement de l'écoulement dans les basses couches permet à de l'air de s'échapper de la zone frontale sur le flanc ouest de la dépression d'altitude. On l'appellera l'intrusion sèche
- la branche DCA sur cette même figure correspond à une circulation d'air dans la partie la plus rapide du courant jet et donc moins influencée par les processus d'entraînement à l'avant et déentraînement à l'arrière. On parlera d'une circulation frontale rapide interagissant peu avec l'environnement
- la partie basse de la figure 3.11 illustre aussi le cas d'un intensification de la dépression de surface qui entraîne un mouvement cyclonique de plus faible diamètre et qui peut ainsi transporter de l'air vers le centre de la dépression d'altitude et sous le WCB. A la différence du WCB qui est a peu près parallèle à la zone frontale, cette circulation permet un transport perpendiculaire au front. On l'appellera le "Cold Conveyor Belt" (CCB)

Le WCB qui entraîne dans le front de l'air situé à basse altitude et à plus basse latitude permet le transport en altitude de masses d'air chaudes et humides avec formation de nuages et de précipitations. Cette circulation permet des transport verticaux de l'ordre de 350 hPa

par jour. Ceci sera aussi facile de vérifier le développement d'une telle circulation avec des cartes de la distribution nuageuse. Les descentes dans l'intrusion sèche sont plus lentes avec des temps de transport en moyenne de l'ordre de -40 hPa par jour. Ceci est cohérent avec la nécessité de conserver globale la masse de la troposphère puisque la taille des zones nuageuses est plus faible que l'extension des zones plus sèches. L'humidification des masses d'air par précipitation sous le WCB implique un déplacement des masses d'air dans le CCB sur des isentropes humides. Ceci permet donc un transport vertical suffisamment efficace même si l'extension horizontale de la zone influencée par le CCB est 3-5 fois moins grande que pour le WCB. Par ailleurs l'air advecté dans le front par le CCB se situe à plus hautes latitudes et sera donc plus froid.

Concernant le rôle de ces circulations sur le transport de constituants chimique, on notera que le WCB permet un transport jusqu'à niveau de la tropopause d'espèces chimiques situées à relativement basse latitudes ($< 45^\circ\text{N}$) dans des régions photochimiquement actives (production polluants secondaires ozone, aérosols organiques) ou de végétations continentales humides (émission de CH_4). Inversement l'intrusion sèche représente un processus important dans l'apport d'ozone d'origine stratosphérique dans la basse troposphère. Le CCB permettra lui d'entraîner dans la zone frontale les émissions du Nord de l'Europe ($> 50^\circ\text{N}$) lors de l'arrivée des perturbations Nord Atlantique.

3.5.2 Exemples d'études de cartes des fonctions de Montgomery

Cas d'une depression de surface bien développée

Un premier exemple permettant de comparer l'intérêt respectif des représentations isobare et isentrope est donné sur la figure 3.12 pour une dépression de surface bien développée sur les USA le 27 février . La carte isobare permet une visualisation de la position du courant jet (zone de resserrement des lignes isohypses) puisque $\vec{V}_g \propto \vec{\nabla}\phi$. Cette carte permet de localiser approximativement les zones ascendances et subsidence (voir paragraphe 3.4.2) par exemple la zone d'advection thermique, c.a.d. la zone d'ascendance correspond à un vent avec une composante méridienne et non perpendiculaire au gradient horizontal de température. En revanche le positionnement exact par rapport aux structures nuageuses ou aux zones sources de polluants atmosphériques n'est pas possible. L'analyse isentrope permet avec les fonctions de Montgomery relative de repérer la ligne la plus à l'ouest avec une courbure anticyclonique qui définira la limite précise de l'extension du basculement entre WCB et la circulation frontale rapide. Une comparaison avec la structure du champ nuageux permet de confirmer que cette approche est capable d'une description fiable du WCB (Fig. 3.13). La coupe verticale le long de l'axe du WCB montre aussi que le déplacement des masses d'air depuis la basse troposphère peut être décomposé en 3 étapes :

FIGURE 3.11 -

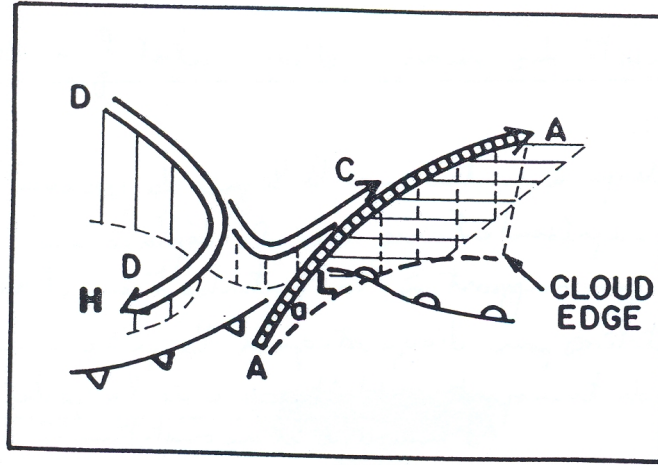


Figure 12.6 Schematic four-dimensional flow pattern for a frozen trough-ridge system, shown in perspective. The descending branch of the circulation (labeled D-D) splits to join the ascending branch of the circulation (A-A) at C. The ascending branch achieves condensation, reaching its lifting condensation level at point "a", and thereafter remains saturated, with the formation of layer cloud (horizontal hatching). The broken line labeled cloud edge is the projection of the westernmost boundary of the ascending branch on the surface and corresponds to a visible cloud edge on satellite photographs.

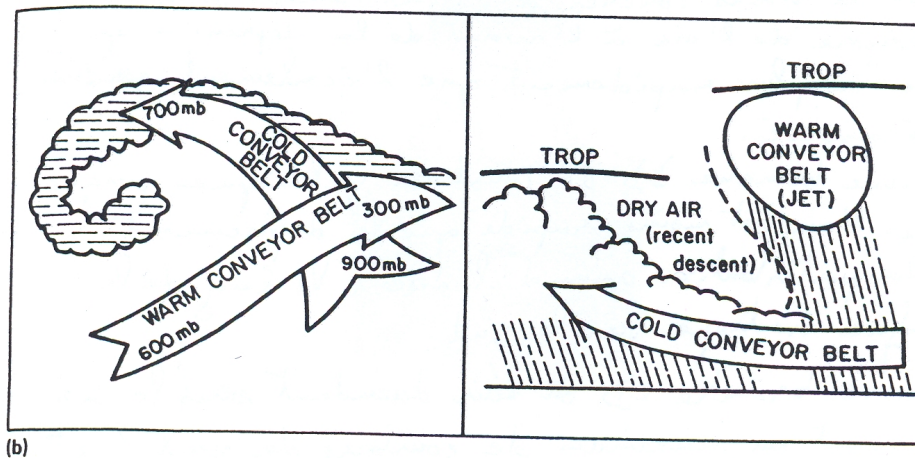


Figure 12.17 (a) Configuration of the warm conveyor belt undergoing modification from a baroclinic cloud leaf to a comma (left to right) and from a rearward-sloping to warm front type conveyor belt. (b) Schematic model of a mature cold conveyor belt in plan view (left) and cross section (right). (Based on figures from Browning, 1989.)

- ascension sur les lignes adiabatiques sèches (ligne trait plein sur fig. 3.13) sous l'effet de l'advection thermique dans le secteur chaud du front de surface
- saturation de l'air chaud et humide vers 750 hPa
- ascension plus rapide de l'air selon les isentropes humides (ligne tiretées sur fig. 3.13) jusqu'à 400 hPa et ascension plus lente au dessus de 400 hPa puisque l'inclinaison des isentropes humides ne diffèrent plus vraiment des isentropes sèches.

Cas d'une dépression d'altitude avant interaction avec front de surface

Un autre exemple est donné sur la figure 3.14 qui correspond à un courant jet intense toujours au dessus des USA le 9 janvier mais avec une courbure modeste du vent à 500 hPa mais non perpendiculaire au gradient de tourbillon. En effet les courbes de tourbillon absolu sont représentées par les lignes tiretées sur cette figure et indiquent que la dépression d'altitude se développe au dessus des grands lacs. La zone d'ascendance avec précipitation se situe sur la cote Est. L'analyse isentrope permet à nouveau de bien localiser la limite ouest du WCB. L'intrusion sèche est aussi clairement visible sur cette carte car la dépression d'altitude se déplace assez rapidement avec des effets d'entraînement et detrainement assez marqués. Cet exemple est intéressant car il montre aussi qu'il n'est pas nécessaire d'avoir un front de surface bien développé pour développer un WCB et les structures nuageuses associées. Le soulèvement dans le WCB correspond à une ascendance de 800 hPa ($z=2\text{km}$) à 300 hPa ($z=8\text{ km}$) sur 1000 km.

Cas d'une cyclogénèse bien développée

Le dernier exemple concerne un cas de cyclogénèse bien développé qui va accentuer le caractère cyclonique de la dépression de surface. Il s'agit d'un cas du 22 Octobre avec une couverture nuageuse montrant la bande de nuages d'altitudes correspondant au WCB (voir ligne C sur la figure 3.15b qui représente la limite ouest du WCB). Une protubérance nuageuse localisée entre les 2 points CC est perpendiculaire au WCB et se distingue des nuages de basse couche. Cette masse de nuages est à plus basse altitude comme la montre l'ombre portée le long de la ligne C. L'analyse isentrope de fonction de Montgomery relative (Fig. 3.15a) confirme que ceci correspond au développement d'une circulation du type CCB avec un soulèvement des masses d'air entre 700 hPa et 400 hPa sur 500 km. Au nord de cette zone les lignes de courant ont une courbure anticyclonique et se confondent alors avec celles du WCB au dessus de 400 hPa. Au sud la courbure devient cyclonique avec enroulement en altitude autour de la dépression de surface. Dans cette zone la circulation du CCB se rapproche aussi de l'intrusion sèche à l'Ouest de la ligne C. L'absence de précipitation sous l'intrusion sèche permet aussi d'expliquer le ralentissement des ascendances liées au CCB au dessus de 600 hPa.

On s'attend aussi à observer dans cette région une stratification importante de la composition chimique avec superposition de 3 couches de nature très différente : le CCB de 800 à 600 hPa (émissions latitudes $>40\text{N}$), l'intrusion sèche entre 600 et 400 hPa (peu humidité et ozone stratosphérique), le WCB entre 400 et 300 hPa (émissions latitudes $<40\text{N}$).

FIGURE 3.12 -

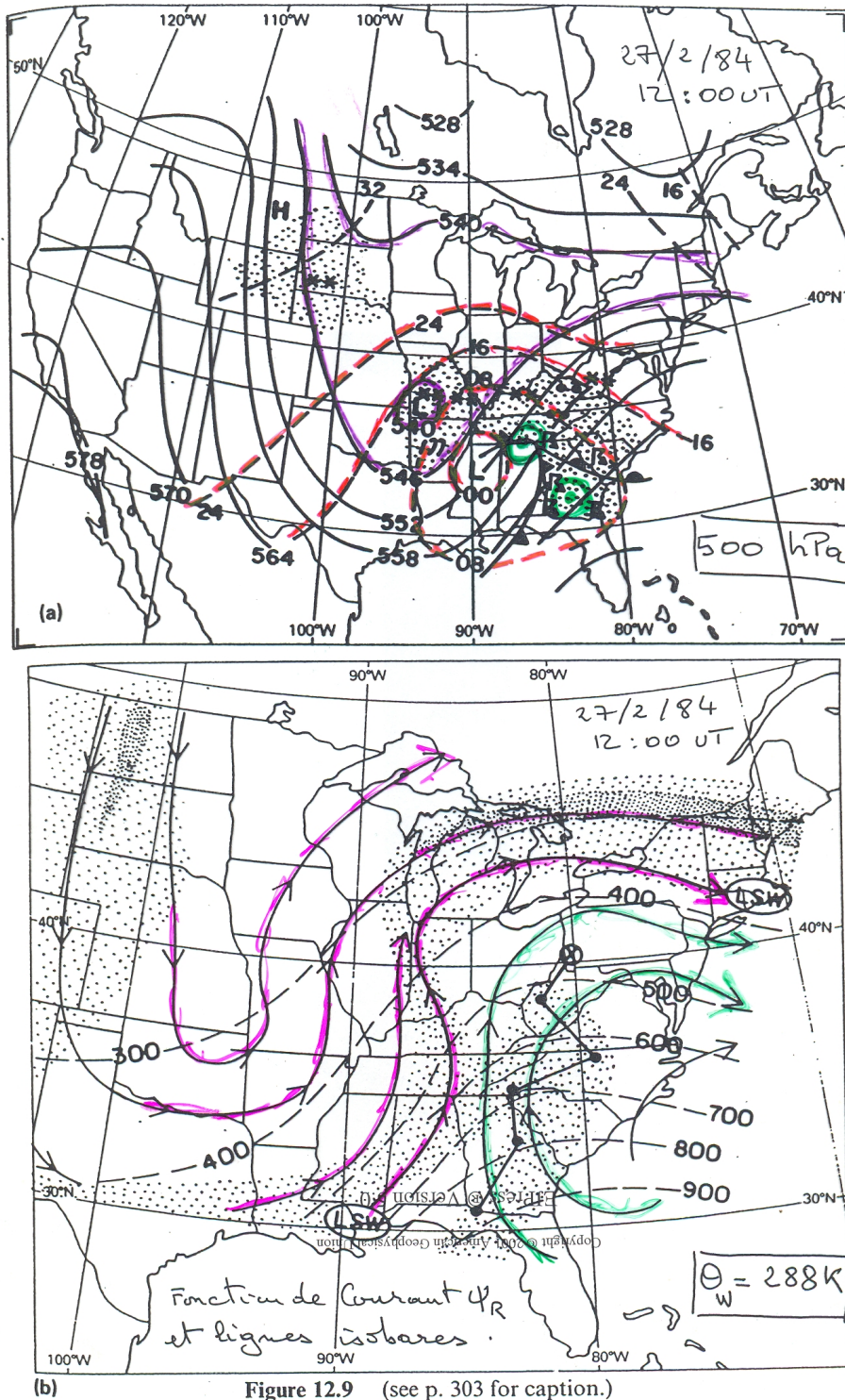
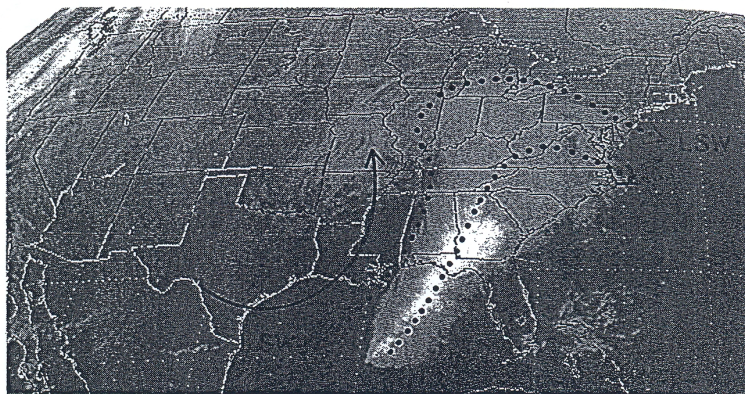


Figure 12.9 (see p. 303 for caption.)

FIGURE 3.13 -



(c)
27/2/84 Image IR (GOES) \approx 10:30 UT

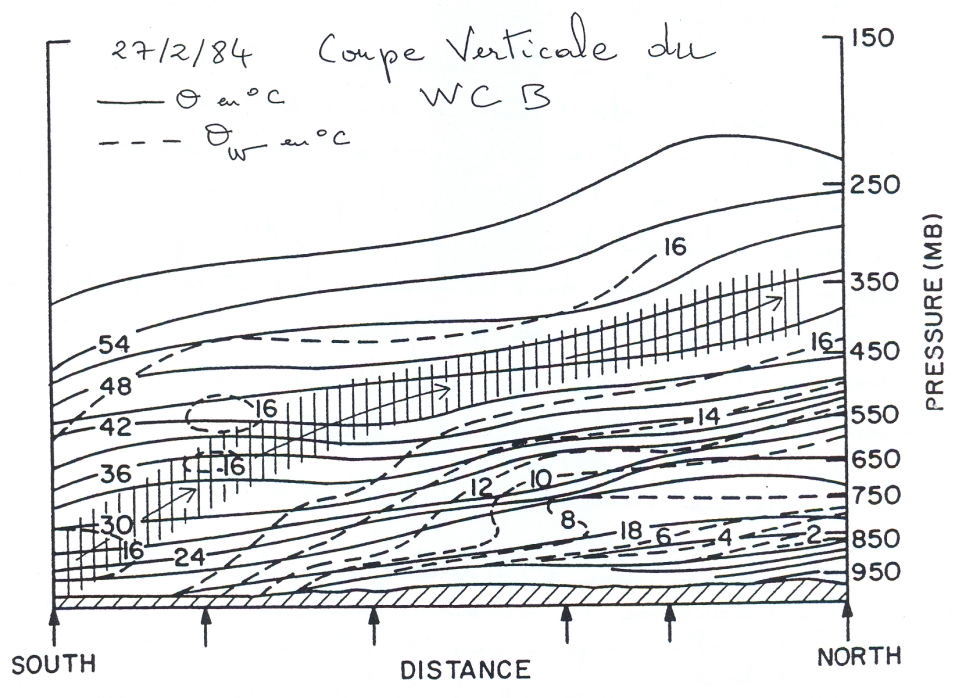
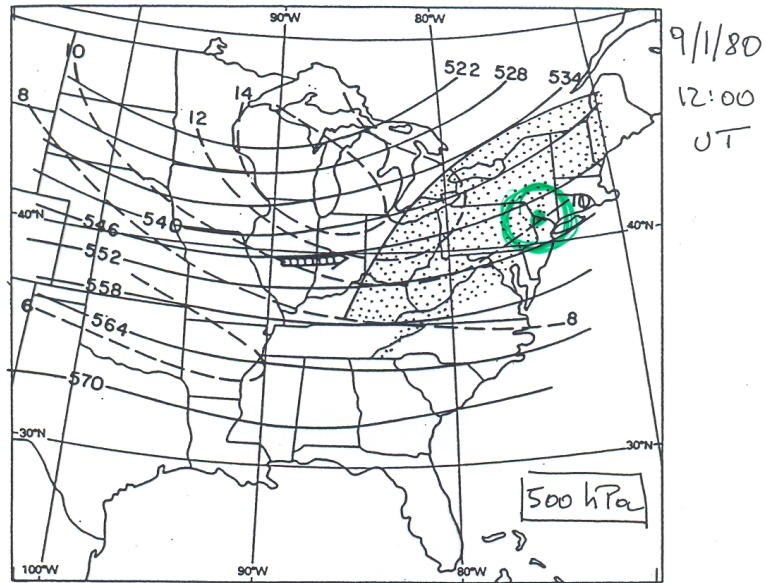


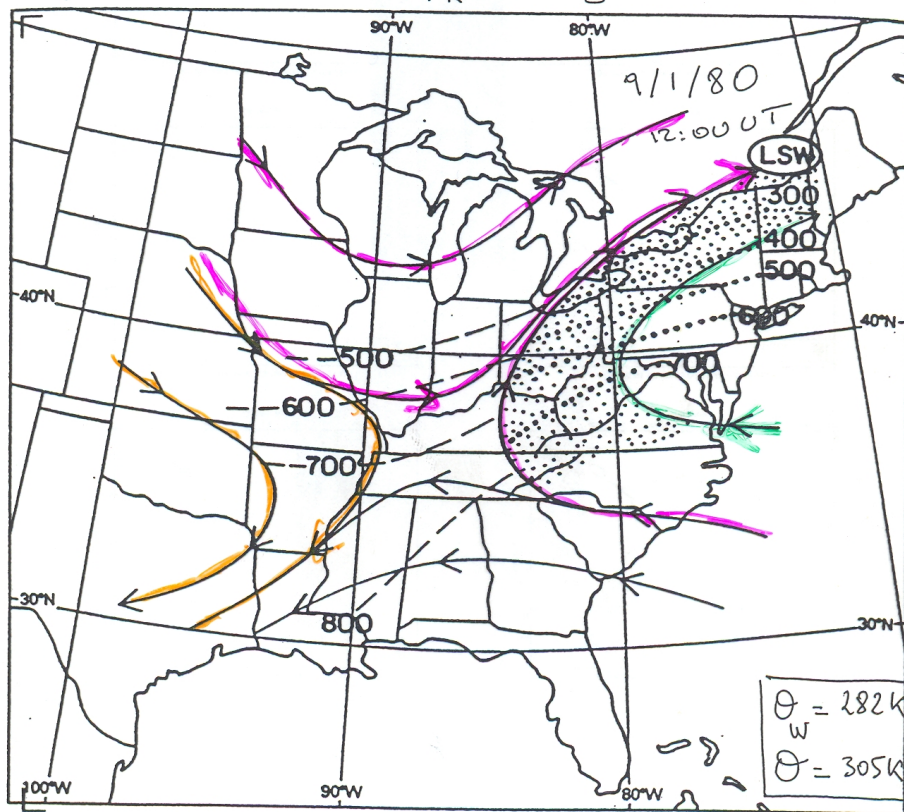
FIGURE 3.14 -



(b)

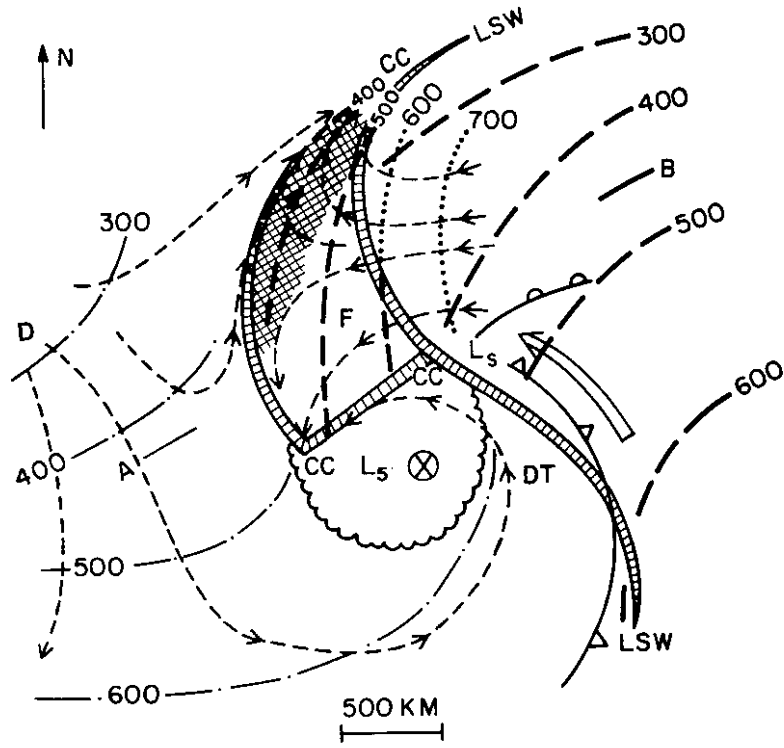
Figure 12.12 (see p. 310 for caption.)

Fonction de Courant Ψ_R et lignes isobares.

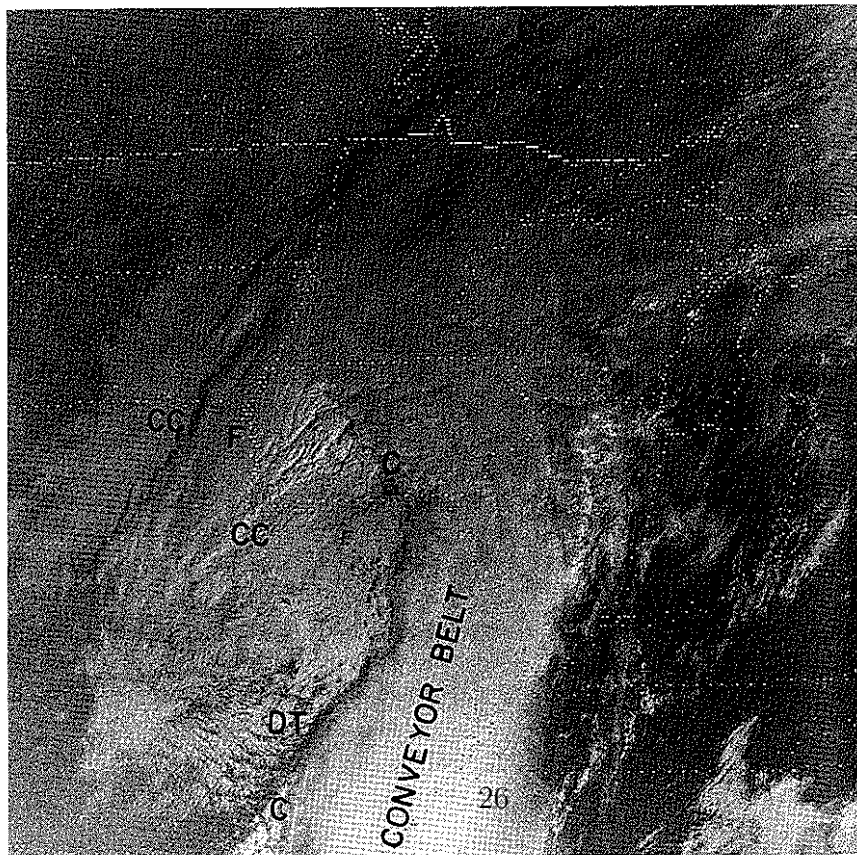


(c)

FIGURE 3.15 -



(a)



(b)

3.5.3 Bilan d'énergie associé au WCB

Si la circulation correspondant au WCB correspond bien au déplacement d'une masse d'air depuis la basse troposphère des latitudes subtropicales avec une température de surface T_i de l'ordre de 25°C jusqu'au niveau du jet stream à une latitude de l'ordre de 50°N, nous pouvons vérifier si le bilan d'énergie lors d'un tel transport correspond bien à la conversion entre énergie cinétique et énergie potentielle. L'équation de conservation de l'énergie totale dans un référentiel relatif à la perturbation va s'écrire

$$\begin{aligned}\frac{d(K_r + P_r)}{t} &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_r - 2\vec{V}_r \cdot (\vec{\Omega} \wedge \vec{C}) \\ K_r &= \frac{1}{2} V_r^2 \\ P_r &= \phi + C_p T + L_e r_{H_2O}\end{aligned}$$

avec $\vec{\Omega}$ = vitesse de rotation de la terre, ρ = densité moléculaire, K_r et P_r sont les énergies cinétique et potentielle, $L_e r_{H_2O}$ = énergie générée par changement de phase de la vapeur d'eau. Le membre de droite est proche de zéro car énergie de déformation est faible (p peu variable dans l'hypothèse de l'onde gelée) et l'énergie de translation avec vitesse C est aussi faible car \vec{V}_r est soit parallèle à \vec{C} soit faible pour les mouvements méridiens. En utilisant les suffixes i et f pour les variables de l'état initial et final et en supposant $\phi_i = 0$ et $V_i = 0$, on peut écrire :

$$\phi_f = C_p(T_i - T_f) - \frac{1}{2} V_f^2 \quad (3.13)$$

On peut établir une 2eme équation utilisant la forme du profil vertical de température au niveau du point d'arrivée pour établir la dépendance de ϕ_f avec la température T_0 au niveau du sol dans la partie Nord du WCB connaissant le gradient adiabatique humide Γ_w de l'ordre de 6°C/km.

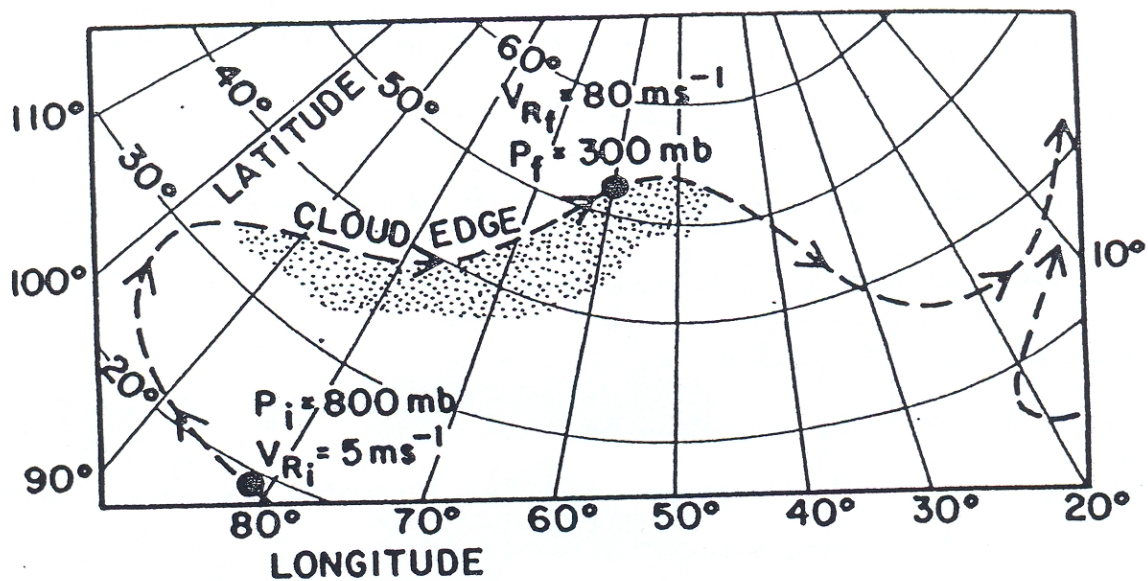
$$\phi_f = g Z_f = \frac{g}{\Gamma_w} (T_0 - T_f) \quad (3.14)$$

En éliminant T_f entre ces 2 équations nous obtenons alors une expression montrant que Z_f ne dépend que de la différence de température potentielle humide entre le point i et le point f et de la vitesse du courant jet dans la zone de sortie du WCB. Notons que la forme de la trajectoire dans le WCB n'intervient pas et on retrouve bien les contraintes imposées par une conversion entre énergie potentielle disponible et énergie cinétique (voir figure 3.16)

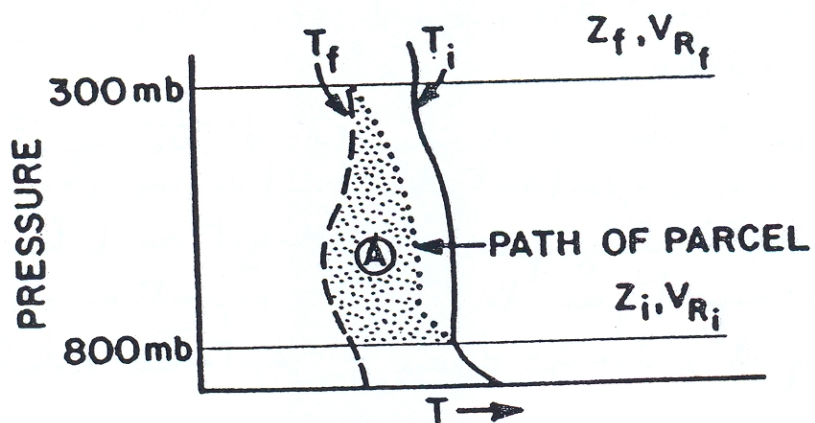
$$Z_f = (T_0 - T_i) \frac{C_p g}{C_p \Gamma_w - g} + V_f^2 \frac{g}{2(C_p \Gamma_w - g)} \quad (3.15)$$

En général on considère la différence entre Γ_w et g/C_p comme étant faible et on peut estimer la vitesse V_f en considérant uniquement la différence de température de 10 K entre T_0 et T_i , nous obtenons alors une valeur de l'ordre de 100 ms⁻¹. De telles vitesses ne sont rencontrées que dans la haute troposphère et ceci est cohérent avec l'ascension élevée des masses d'air dans le WCB. Ceci confirme bien la pertinence de considérer ces lignes comme des quasi-trajectoires des masses d'air.

FIGURE 3.16 -



(a)



(b)

3.6 L'apport des mesures de traceurs chimiques

3.6.1 Quels traceurs utiliser ?

3.6.2 Analyse de l'article de Bethan et al. 1996

3.6.3 Analyses climatologiques des corrélations ozone-monoxide de carbone

3.7 Annexes

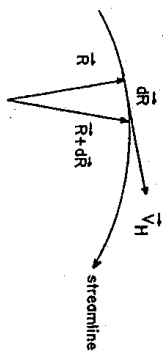


Fig. III-14. The horizontal velocity V_H at the point identified by the position vector R .

in the cross-multiplication is performed we obtain

$$(u dy - v dx)k = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v(x, y, t)}{u(x, y, t)}$$

(III-32)

is the differential equation of the streamlines, and is really nothing else than the slope of the horizontal wind vector, and hence of the streamline, in the xy -plane. For three-dimensional flow with velocity vector $\mathbf{V} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ and the position vector $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, the condition corresponding to Eq. (III-31) is

$$\mathbf{V} \times d\mathbf{r} = 0,$$

which leads to the differential equation of the three-dimensional streamlines

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

(III-33)

As mentioned earlier in this chapter, the streamlines always exist, and can always be drawn, and when we know the velocity components as functions of space, the equation of the streamlines is a solution of the governing differential equation (III-32 or III-33). For two-dimensional flow, Eq. (III-32) applies, and we can write it in the form

$$v dx - u dy = 0 \quad (\text{III-34})$$

If this flow is purely non-divergent, then it can be represented in terms of a streamfunction alone, i.e., $V_H = \mathbf{k} \times \nabla_H \psi$, so $u = -\partial\psi/\partial y$, $v = \partial\psi/\partial x$. Substituting these expressions for u and v into Eq. (III-34), we obtain

[Answer] $\nabla_H \times \mathbf{R} = 0$

F. Streamlines, Trajectories

By definition, a *streamline* is a line which is at every point tangent to the instantaneous velocity vector at the point. Streamlines are a convenient device to give a visual representation of the flow. Consider now a streamline for the case of horizontal flow. Any point on the streamline can be identified by a position vector \mathbf{R} drawn from some origin (Fig. III-14). The wind vector V_H is tangent to the streamline at the point in question. Moreover, for small enough increments, the vector $d\mathbf{R}$ will also be tangent to the streamline (recall that the unit tangent \mathbf{t} is given by the derivative $d\mathbf{R}/ds$). Since successive position vectors identify successive points on the streamline, the requirement of tangency of V_H to the streamline is expressed mathematically by the condition of parallelism of V_H and $d\mathbf{R} = \mathbf{t} ds$

$$V_H \times d\mathbf{R} = 0 \quad (\text{III-31})$$

or

$$(u\mathbf{i} + v\mathbf{j}) \times (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = 0.$$

$$v dx - u dy = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = d\psi = 0,$$

since $d\psi = 0$ along any line $\psi = \text{constant}$. We now see that in the case of non-divergent flow, the lines $\psi = \text{constant}$ coincide with the streamlines. Accordingly, for this type of flow the streamfunction is also an equation for the streamlines: for any given value $\psi = \text{constant}$ we get a streamline. In other words, when the flow is purely non-divergent, the streamfunction defines a family of streamlines.

Example 4: Consider the horizontal flow $V_H = -by\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$, where b is a positive constant. This is the circular flow of Example 1 in this chapter. The differential equation of the streamlines is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = -\frac{bx}{by} = -\frac{x}{y},$$

which has the solution

$$\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = c_0$$

or

$$x^2 + y^2 = c, \tag{III-35}$$

where c_0 and c are constants. Thus, the streamlines are concentric circles. We had already found in Example 1 that this flow is purely non-divergent, and can be represented in terms of a streamfunction ψ alone, where

$$\psi = \frac{b}{2}(x^2 + y^2). \tag{III-36}$$

Thus, the lines $\psi = \text{constant}$ are also concentric circles. When we solve Eqs. (III-35, -36) for y^2 we obtain

$$y^2 = c - x^2,$$

and

$$y^2 = \frac{2\psi}{b} - x^2.$$

So, the member of the streamfunction family whose value is $\psi = bc/2$ is also the streamline whose value is c . As expected, the streamlines coincide with the lines $\psi = \text{constant}$.

We have already defined the *trajectory* as the actual path of a fluid parcel. Alternatively, the trajectory is the locus of successive positions of a parcel. Thus, if we want to know what the trajectory of a fluid parcel is, we are really asking the question: "What are the successive locations of a fluid parcel as functions of time?" These successive locations evidently depend on the motion of the parcel, and are *defined mathematically* by solutions of the differential equation

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{V}(\mathbf{r}, t), \tag{III-37}$$

where \mathbf{r} and \mathbf{V} are the three-dimensional position and velocity vectors, respectively. When we have a solution of Eq. (III-37) for $\mathbf{r}(t)$, subject to some initial conditions at time $t = t_0$, then we know the fluid parcel trajectory. In xyz -space, the *parametric differential equations* of the trajectory are:

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t). \tag{III-38}$$

Only the first two differential equations of Eq. (III-38) appear if the flow is two-dimensional.

In most cases the solution of Eq. (III-37) (or (III-38)) is extremely difficult, and can often be achieved only under certain simplifying assumptions or by numerical methods. Since the motion is generally subject to accelerations, the trajectory must satisfy the equation of motion and any other equations which may be pertinent to the problem under consideration. However, in some simple cases, the trajectory equations can be solved.

To simplify matters somewhat, we shall return to two-dimensional horizontal flow, but results are generally applicable to three-dimensional flow. At some initial time $t = t_0$, the velocity vector V_H has a slope v/u in the xy -plane. Accordingly, the tangent to the trajectory is also a tangent to the streamline at t_0 . If the streamlines were to remain fixed in time and space, a fluid parcel would follow a streamline, and streamlines and trajectories would coincide. In the general case, however, the streamlines change with time, and trajectories will differ from streamlines. Remember that the picture presented by the streamlines is only an instantaneous snapshot of the motion. We conclude that *trajectories and streamlines coincide only in the special case when the motion field is steady*.

Example 5: The circular horizontal flow $V_H = -by\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ of Examples 1 and 4 is a steady state flow. Here, $dV_H/dt \neq 0$ since fluid parcels are constantly accelerated towards the circulation center, but $\partial V_H/\partial t = 0$ because the flow pattern does not change with time. Therefore we expect

trajectories and streamlines to coincide. Let us find the trajectory of a fluid parcel which is at a point $x = x_0, y = y_0$ when $t = 0$. The parcel positions are functions of time ($x = x(t)$ and $y = y(t)$), and their differential equations are

$$\frac{dx}{dt} = u = -by, \quad \frac{dy}{dt} = v = bx. \quad (\text{III-39})$$

The solution of the system of differential equations (Eq. (III-39)) can be obtained in various ways (for example, by constructing the complex variable $z = x + iy$), which leads to the differential equation $dz/dt = ibz$. The solution which satisfies the initial conditions is

$$x(t) = x_0 \cos bt - y_0 \sin bt, \quad (\text{III-40a})$$

$$y(t) = x_0 \sin bt + y_0 \cos bt, \quad (\text{III-40b})$$

and it is easily verified that $x^2 + y^2 = x_0^2 + y_0^2$, so that the trajectory of the parcel is a circle of radius $\sqrt{x_0^2 + y_0^2}$. This becomes even more obvious if we choose the parcel which is on the x -axis at a location $x = x_0$ when $t = 0$. Then $y_0 = 0$, and Eq. (III-40) becomes

$$x(t) = x_0 \cos bt, \quad y(t) = x_0 \sin bt,$$

which are obviously the parametric equations of a circle with center at the origin and of radius x_0 . We have already established in Example 4 that the streamlines are concentric circles of this type.

Example 6: Let us consider a case where the flow is not steady, so that the streamlines change with time. A simple example of such a flow can be constructed by the superposition of a constant zonal flow and a meridional flow with sinusoidal profile. Then the velocity components are

$$u = U = \text{constant} > 0, \\ v = v_0 \cos k(x - ct),$$

where v_0 is a constant and c is the (constant) speed of propagation of the sinusoidal profile. If $c > 0$, the profile is propagated to the right (toward positive x) with constant speed c . The letter k denotes the so-called wavenumber and is given by $k = 2\pi/L$, where L is the wavelength.* The components of the flow are shown in Fig. III-15 at time $t = 0$.

* The strict definition of wave number should be $k' = 1/L$. The dimensions of k' are cycles per unit length, and k' tells you how many times a wave pattern is repeated per unit distance. However, for mathematical reasons it is often more useful to employ the radian wave number $k = 2\pi k' = 2\pi/L$, whose dimensions are radians per unit distance.

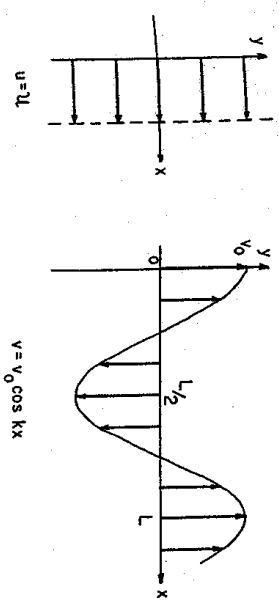


Fig. III-15. The zonal and (initial) meridional wind components of the flow field of Example 6.

The differential equation of the streamlines is

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{u} = \frac{v_0}{U} \cos k(x - ct).$$

Since the streamlines refer only to a specific instant in time, we treat the time t as if it were a constant in the differential equation above. The solution of the differential equation is then

$$y_s = \frac{v_0}{Uk} \sin k(x - ct) + y_0, \quad (\text{III-41})$$

where y_0 is a constant and y_s means "y" for the streamlines. Equation (III-41), is the equation of the streamlines, and the constant y_0 identifies any particular streamline of the system. We see that the streamlines are identical sine curves of amplitude v_0/Uk , displace northward ($y_0 > 0$) or southward ($y_0 < 0$) with respect to the x -axis. The streamline pattern moves parallel to the x -axis without changing shape (since v_0, U, k , and y_0 are constants independent of time). A few of the streamlines at time $t = 0$ are shown in Fig. III-16. The arrows on the streamlines show the direction of flow. As time increases, the entire pattern shifts to the right when $c > 0$. The velocity vector of the combined flow is given by

$$V_H = Ui + v_0 \cos k(x - ct)j.$$

It is left as an exercise to show that the velocity can be represented in terms of a streamfunction alone

$$V_H = k \times \nabla_H \left[\frac{v_0}{k} \sin k(x - ct) - Uy \right],$$

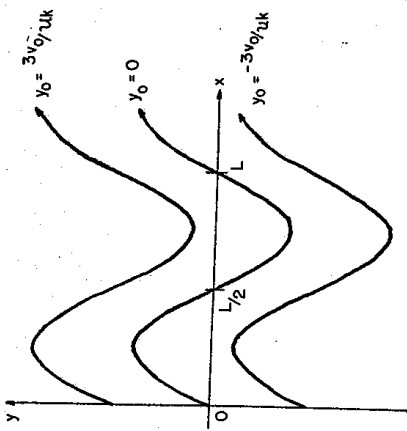


Fig. III-16. Three streamlines of the flow in Example 6 at time $t = 0$.

so the streamfunction is

$$\psi = \frac{v_0}{k} \sin k(x - ct) - Uy. \quad (\text{III-42})$$

When we solve this equation for y we obtain

$$y = \frac{v_0}{Uk} \sin k(x - ct) - \frac{\psi}{U}, \quad (\text{III-43})$$

and we see that the streamfunction also gives the streamlines in this case, as expected. Comparing Eqs. (III-43) and (III-41), we note that the lines $\psi = -Uy_0 = \text{constant}$ are also streamlines.

To simplify the trajectory calculation somewhat, we shall compute the trajectory of the fluid parcel which is at the origin at the time $t = 0$, so that $x = 0, y = 0$ initially. The differential equations of the trajectory are

$$\frac{dx}{dt} = u = U = \text{constant}, \quad (\text{III-44a})$$

$$\frac{dy}{dt} = v = v_0 \cos k(x - ct). \quad (\text{III-44b})$$

The solution of this system is greatly simplified because U is a constant, and we can solve the two equations separately. Equation (III-44a) gives us immediately the solution

$$x(t) = Ut + x_0.$$

Since we require $x = 0$ when $t = 0$, we have $x_0 = 0$, and thus

$$x(t) = Ut.$$

The (dependent) variable x in Eq. (III-44b) is of course the variable $x(t)$, and we can replace it in Eq. (III-44b) by the value of x just found, so that the differential equation becomes

$$\frac{dy}{dt} = v_0 \cos k(Ut - ct) = v_0 \cos k(U - c)t.$$

The solution of this equation is

$$y(t) = \frac{v_0}{k(U - c)} \sin k(U - c)t + y_0,$$

where now $y_0 = 0$ since we require $y = 0$ when $t = 0$. Thus the desired solution is

$$y(t) = \frac{v_0}{k(U - c)} \sin k(U - c)t.$$

Now we have the parametric equations of the trajectory of the fluid parcel which is at the origin at time $t = 0$

$$x(t) = Ut, \quad (\text{III-45a})$$

$$y(t) = \frac{v_0}{k(U - c)} \sin k(U - c)t. \quad (\text{III-45b})$$

We can use these equations to find successive positions of our parcel by computing x and y from given values of t . In this simple example it is possible, however, to obtain a single equation for the trajectory. From Eq. (III-45a), we have time $t = x/U$, and when we substitute in Eq. (III-45b) we obtain the equation of the trajectory in the form

$$y = \frac{v_0}{k(U - c)} \sin k \left(1 - \frac{c}{U} \right) x, \quad (\text{III-46})$$

where y_T means "y" for the trajectory. Now we see that the trajectory is a sine curve with amplitude $v_0/k(U - c)$.

At the initial time $t = 0$, our fluid parcel is on the streamline $y_0 = 0$, and we see from Eq. (III-41) that this is the streamline

$$y_s = \frac{v_0}{Uk} \sin k(x - ct). \quad (\text{III-47})$$

Note that Eqs. (III-46) and (III-47) are not identical (this is certainly obvious as far as the amplitude is concerned), and it follows that the streamlines and trajectories do not coincide in this case. However, suppose the streamline pattern remains stationary in its original position, which would be the case if the phase speed c is equal to zero. Then the equation of the trajectory becomes

$$y_T = \frac{v_0}{Uk} \sin kx, \quad (\text{III-46'})$$

and that of the streamline becomes

$$y_s = \frac{v_0}{Uk} \sin kx. \quad (\text{III-47'})$$

We see that the trajectory and streamline coincide in this case. Thus, if the streamline pattern is stationary, the streamlines and trajectories coincide, i.e., the fluid parcels remain on their original streamlines.

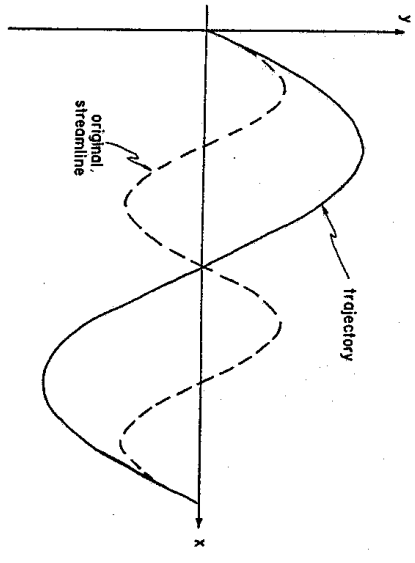


Fig. III-17. Shown are the trajectory (solid line) and original streamline (dashed) for a parcel initially at the origin. $c = U/2$.

Figure III-17 shows the trajectory of a fluid parcel which is originally at the origin. The streamline which originally goes through the origin is also shown (dashed curve). The entire streamline pattern moves to the right with speed $c = U/2$.

We must keep in mind that the solution of the differential equation of the trajectory, Eq. (III-37), is not an easy problem in general. Simple solutions were obtained in the last two examples because the flow fields were simple, and because the velocity fields were prescribed explicitly for all times.